

Gas Dynamical Friction とオストライカー公式

鈴木智也

2024年9月3日

1 はじめに

ガス媒質中の天体には、周囲のガス粒子から受ける重力がかかる。天体がガス中を運動している場合、その運動によってガス密度が揺らぎ、天体の運動に対して下流側の方がわずかに密度が高くなるため、ガスが天体に及ぼす重力は天体を減速させる向きにかかる。これを、Gas Dynamical Friction という。Dynamical Friction (力学的摩擦) は元々、ダークマターや星といった無衝突物体の中を通過する天体が統計的に受ける力を表したものであり、基本的に力は天体が減速する向きにかかるため、摩擦という言葉が使われる。Gas Dynamical Friction については、オストライカーが1999年の論文で、その速度依存性を表す解析的な公式を導いた。その手順について以下で詳細を説明するが、大雑把な方向性は次の通りである。まず、時刻 $t = 0$ に摂動天体が突然発生すると仮定して流体力学の基礎方程式を線形化し、対応する密度摂動を解析的に求める。これを基にして、ガスが天体に与える重力の合計値を計算し、得られた結果が Gas Dynamical Friction を表す。以下では、オストライカーの論文 [1] に基づいて、Gas Dynamical Friction の速度依存性を表す公式を導出する。

2 基礎方程式と摂動展開

流体の基礎方程式である連続の式とオイラー方程式を出発点とする:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi_{\text{ext}}. \quad (2)$$

ここで、 ρ , \mathbf{v} , p はそれぞれ流体の密度、速度、圧力を表す。 Φ_{ext} は外力のポテンシャルを表す。ここでは外力として重力を考え、ポアソン方程式で決まるものとする。以下、密度、速度に対してそれぞれ摂動を考え、線形化された方程式をつくる。 $\rho = \rho_0[1 + \alpha(\mathbf{x}, t)]$, $\mathbf{v} = c_s \beta(\mathbf{x}, t)$ として、上式に代入すると、以下のような2つの方程式が得られる:

$$\frac{1}{c_s} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \beta = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{c_s} \frac{\partial \beta}{\partial t} + \nabla \alpha = -\frac{1}{c_s^2} \nabla \Phi_{\text{ext}}. \quad (4)$$

ここで、流体の状態方程式は断熱を仮定し、音速の定義

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s, \quad (5)$$

を用いた。これら2つの方程式から β を消去すると1つの方程式となり、外力ポテンシャルのラプラシアンをソースとする波動方程式の形になる:

$$\nabla^2 \alpha - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = -\frac{1}{c_s^2} \nabla^2 \Phi_{\text{ext}}. \quad (6)$$

ここで、 Φ_{ext} は重力ポテンシャルを表すと仮定したので、ポアソン方程式 $\nabla^2 \Phi_{\text{ext}} = 4\pi G \rho_{\text{ext}}$ と $\rho_{\text{ext}} \equiv c_s^2 f(\mathbf{x}, t)/G$ なる置き換えを用いると、解くべき方程式は以下のように決定される:

$$\nabla^2 \alpha - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = -4\pi f(\mathbf{x}, t). \quad (7)$$

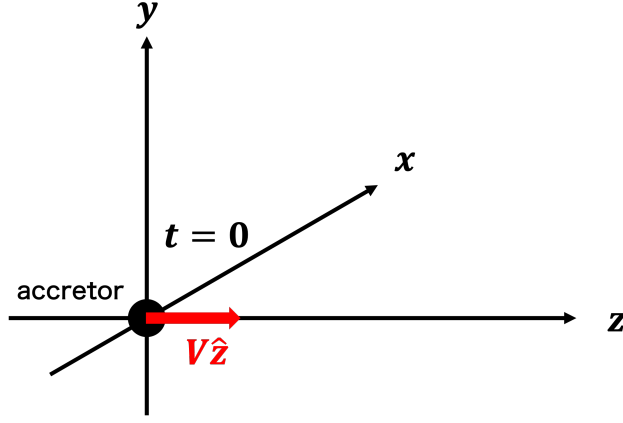


図 1: 等速直線運動する摂動天体が及ぼす密度揺らぎを計算するための座標. $t = 0$ に原点から $+z$ 方向に摂動天体が一定速度 v_p で運動を始める. 天体の質量は M_p である.

得られた α に関する方程式 (7) は, ソース有りの波動方程式であるから, 遅延グリーン関数を用いて解くことができ,

$$\alpha(t, \mathbf{x}) = \int dx'^3 \int dt' \frac{\delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c_s}\right) f(t', \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (8)$$

と求まる.

3 等速直線運動する摂動天体

ここまでは, ソースに関しては特定せずに密度摂動の解を求めたが, 以下ではソースを等速直線運動する天体であると仮定して密度摂動を計算する. 図 1 のように $+z$ 方向に速度 v_p で等速直線運動する質量 M_p 天体と考えると, 摂動天体の密度分布に相当する $f(t, \mathbf{x})$ は,

$$f(t, \mathbf{x}) = \frac{GM_p}{c_s^2} \delta(x) \delta(y) \delta(z - Vt) \theta(t), \quad (9)$$

と書ける. ここで, $\theta(t)$ は重力源発生時刻以降を 1, それ以前を 0 とする階段関数である. 上で求めた解 (8) をこれを代入すると,

$$\begin{aligned} \alpha(t, \mathbf{x}) &= \frac{GM_p}{c_s^2} \int dx' dy' dz' \int dt' \frac{\delta\left(t' - t + \frac{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}}{c_s}\right)}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}} \\ &\quad \times \delta(x') \delta(y') \delta(z' - v_p t') \theta(t'), \\ &= \frac{GM_p}{c_s^2} \int dw \frac{\delta(w + s + \mathcal{M}(R^2 + w^2)^{1/2})}{(R^2 + w^2)^{1/2}} \theta\left(\frac{w+z}{v_p}\right), \end{aligned} \quad (10)$$

が得られる. ここで, $R := (x^2 + y^2)^{1/2}$, $s := z - v_p t$, $w := z' - z$ とおいた. また, $\mathcal{M} := V/c_s$ はマッハ数である. 1 行目から 2 行目の計算では, まず x' , y' に関する積分を実行した後, $\delta(z' - v_p t') = (1/v_p) \delta(t' - (w+z)/v_p)$ に着目して t' 積分を実行した. w 積分を計算するには, デルタ関数の引数がゼロとなる際の解を用いてデルタ関数を展開するのが正攻法である. デルタ関数の引数がゼロとなるような w は, 方程式

$$w + s + \mathcal{M}(R^2 + w^2)^{1/2} = 0, \quad (11)$$

によって与えられる. この方程式の解は, 複素数解も含めたうえで以下のように書ける:

$$w_{\pm} = \frac{s \pm \mathcal{M}[s^2 + R^2(1 - \mathcal{M}^2)]^{1/2}}{\mathcal{M}^2 - 1}. \quad (12)$$

ただし, $\mathcal{M}(R^2 + w^2) > 0$ であるから, $w + s < 0$ は満たされなければならない. すなわち,

$$w_{\pm} + s = \frac{\mathcal{M}^2 s \pm \mathcal{M}[s^2 + R^2(1 - \mathcal{M}^2)]^{1/2}}{\mathcal{M}^2 - 1} < 0, \quad (13)$$

が成り立つ必要があることに注意しなければならない. 分母の符号がマッハ数の 1 と比較したときの大小で決まるため, 解の個数は亜音速の場合と超音速の場合で異なる.

$\mathcal{M} < 1$ のとき, $w_{\pm} + s$ の分母は負であるから, $\mathcal{M}[s^2 + R^2(1 - \mathcal{M}^2)]^{1/2} > 0$ が成り立たねばならない. 不等式 $\mathcal{M}[s^2 + R^2(1 - \mathcal{M}^2)]^{1/2} > \mathcal{M}|s|$ を用いると,

$$\mathcal{M}^2 s + \mathcal{M}[s^2 + R^2(1 - \mathcal{M}^2)]^{1/2} > \mathcal{M}(\mathcal{M}s + |s|) > 0, \quad (14)$$

$$\mathcal{M}^2 s - \mathcal{M}[s^2 + R^2(1 - \mathcal{M}^2)]^{1/2} < \mathcal{M}(\mathcal{M}s - |s|) < 0, \quad (15)$$

となるので, 解として適切なのは $w = w_+$ のみである.

$\mathcal{M} > 1$ のとき, $w_{\pm} + s$ の分母は正であるので, 解として適切な w は,

$$\mathcal{M}^2 s \pm \mathcal{M}[s^2 + R^2(1 - \mathcal{M}^2)]^{1/2} < 0, \quad (16)$$

を満たさねばならない. $w = w_+$ に関して, 第 2 項が正の数であるため, 上の条件を満たすには $s < 0$ が必要である. また, $w = w_-$ に関しては, 不等式 $\mathcal{M}^2 |s| > \mathcal{M}[s^2 + R^2(1 - \mathcal{M}^2)]^{1/2}$ が成り立つため (実際に両辺を 2 乗して大きさを比べるとすぐにわかる), やはり $s < 0$ が必要である. それに加えて, 根号の中身が正となるべしという条件から,

$$\frac{|s|}{R} > (\mathcal{M}^2 - 1)^{1/2} \quad (17)$$

が必要である. 以上より,

$$s < 0, \quad \frac{|s|}{R} > (\mathcal{M}^2 - 1)^{1/2}, \quad (18)$$

を満たすとき, $w = w_{\pm}$ の両方が解として適切であり, それ以外の場合は両方が解として不適切である.

以上の下準備をもとにデルタ関数を展開する. $g(w) = w + s + \mathcal{M}(R^2 + w^2)^{1/2}$ とおくと, $g'(w) = 1 + \mathcal{M} \frac{w}{(R^2 + w^2)^{1/2}}$ より,

$$g(w = w_{\pm}) = 1 + \mathcal{M} \frac{w_{\pm}}{(R^2 + w_{\pm}^2)^{1/2}} = \pm \frac{[s^2 + R^2(1 - \mathcal{M}^2)]^{1/2}}{(R^2 + w_{\pm}^2)^{1/2}}, \quad (19)$$

となる. 故に,

$$\begin{aligned} \delta(g(w)) &= \frac{\delta(w - w_-)}{|g'(w_-)|} + \frac{\delta(w - w_+)}{|g'(w_+)|}, \\ &= \frac{1}{[s^2 + R^2(1 - \mathcal{M}^2)]^{1/2}} \\ &\quad \times \{(R^2 + w_+^2)^{1/2} \delta(w - w_+) + (R^2 + w_-^2)^{1/2} \delta(w - w_-)\}, \end{aligned} \quad (20)$$

となり, (10) の積分を実行すると, 以下のような解が得られる:

$$\alpha(t, \mathbf{x}) = \frac{GM_p/c_s^2}{[s^2 + R^2(1 - \mathcal{M}^2)]^{1/2}} \sum_{w=w_+, w_-} \theta\left(\frac{z+w}{v_p}\right). \quad (21)$$

3.1 摂動源が定常の場合

ここで, 定常の場合について密度摂動がどのように振る舞うかを考える. このとき, 任意の時刻で $\theta(t) = 1$ となるので, マッハ数によって解の個数が異なることに注意して,

$$\alpha_s(t, \mathbf{x}) = \frac{GM_p/c_s^2}{[s^2 + R^2(1 - \mathcal{M}^2)]^{1/2}} \begin{cases} 1 & (\mathcal{M} < 1), \\ 2 & (\mathcal{M} > 1), \\ 0 & (\text{otherwise,}) \end{cases} \quad (22)$$

となる。解の性質を調べると、以下のようなことがわかる。 $M < 1$ のとき、密度一定線は

$$\frac{s^2}{(GM_p/\alpha_s c_s^2)^2} + \frac{R^2}{(GM_p/\alpha_s c_s^2(1-M^2)^{1/2})^2} = 1, \quad (23)$$

となり、 $s-R$ 平面上の楕円を表す。 $M > 1$ の場合、密度一定線は

$$\frac{s^2}{(GM_p/2\alpha_s c_s^2)^2} - \frac{R^2}{(GM_p/2\alpha_s c_s^2(1-M^2)^{1/2})^2} = 1, \quad (24)$$

となり、 $s-R$ 平面上の双曲線を表す。

3.2 摂動源が非定常な場合

次に、非定常な場合について密度摂動がどのように振る舞うかを考える。具体的には、 $t=0$ に摂動天体が現れた場合を扱う。この場合、 $\theta(t)$ が階段関数となるため、引数の符号が正のときのみ値をもつこと注意しなければならない。今、 $v_p > 0$ としているため、

$$z + w_{\pm} = \frac{\{\mathcal{M}^2 s + (\mathcal{M}^2 - 1)v_p t\} \pm \mathcal{M}[s^2 + R^2(1 - \mathcal{M}^2)]^{1/2}}{\mathcal{M}^2 - 1}, \quad (25)$$

の符号について調べることが必要となる。

$M < 1$ の場合、先述の通り $w = w_+$ のみが解となるので、階段関数が値をもつための条件は、

$$(1 - \mathcal{M}^2)v_p t - \mathcal{M}^2 s > \mathcal{M}[s^2 + R^2(1 - \mathcal{M}^2)]^{1/2}, \quad (26)$$

である。この不等式の両辺を2乗した後、 $s = z - v_p t$ によって s を z に書き換えると、

$$R^2 + z^2 < (c_s t)^2, \quad (27)$$

が同値な不等式として得られる。ここで、元の不等式について右辺が正の数であることは自明であるから、両辺を2乗しても不等号の向きは変わらない。

$M > 1$ の場合、条件 $s/R < -(\mathcal{M}^2 - 1)^{1/2}$ は前提としたうえで議論を進める。先述の通り $w = w_+$ 、 $w = w_-$ が共に解となるため、階段関数が値をもつための条件は

$$\mathcal{M}^2 s + (\mathcal{M}^2 - 1)v_p t \pm \mathcal{M}[s^2 + R^2(1 - \mathcal{M}^2)]^{1/2} > 0, \quad (28)$$

となる。まず、 $w = w_+$ の場合に関して考えると、上の条件は、

$$-\mathcal{M}^2 s - (\mathcal{M}^2 - 1)v_p t < \mathcal{M}[s^2 + R^2(1 - \mathcal{M}^2)]^{1/2}, \quad (29)$$

のように書ける。この不等式は、右辺が正の数で確定している一方で、左辺の符号が未定である。両辺を2乗して根号を取り去るためには、左辺と右辺の絶対値の大小を判断することが求められる。絶対値の大小によって、2乗したときに不等号の向きが変わるからである。左辺と右辺の2乗の差を計算すると、

$$\begin{aligned} & |\mathcal{M}[s^2 + R^2(1 - \mathcal{M}^2)]^{1/2}|^2 - |-\mathcal{M}^2 s - (\mathcal{M}^2 - 1)v_p t|^2, \\ & = \mathcal{M}^2(R^2 + z^2 - c_s^2 t^2), \end{aligned} \quad (30)$$

となるため、 $R^2 + z^2 > c_s^2 t^2$ を満たすとき、不等号の向きはそのまま2乗することができ、少し計算すると、 $R^2 + z^2 > c_s^2 t^2$ が得られる。 $R^2 + z^2 < c_s^2 t^2$ を満たす場合は、不等号の向きが逆になり、 $R^2 + z^2 < c_s^2 t^2$ が得られる。つまり、 $z + w_+ > 0$ は、 $R^2 + z^2 < (c_s t)^2$ 、 $R^2 + z^2 > (c_s t)^2$ に対して成り立つ。次に、 $w = w_-$ の場合に関して考えると、上の条件は、

$$\mathcal{M}^2 s + (\mathcal{M}^2 - 1)v_p t > \mathcal{M}[s^2 + R^2(1 - \mathcal{M}^2)]^{1/2}, \quad (31)$$

のように書ける。右辺が正の数であることから、左辺が正の数でなければそもそも不等号が成り立たない。少し計算すれば、これが

$$z > \frac{c_s}{\mathcal{M}} t, \quad (32)$$

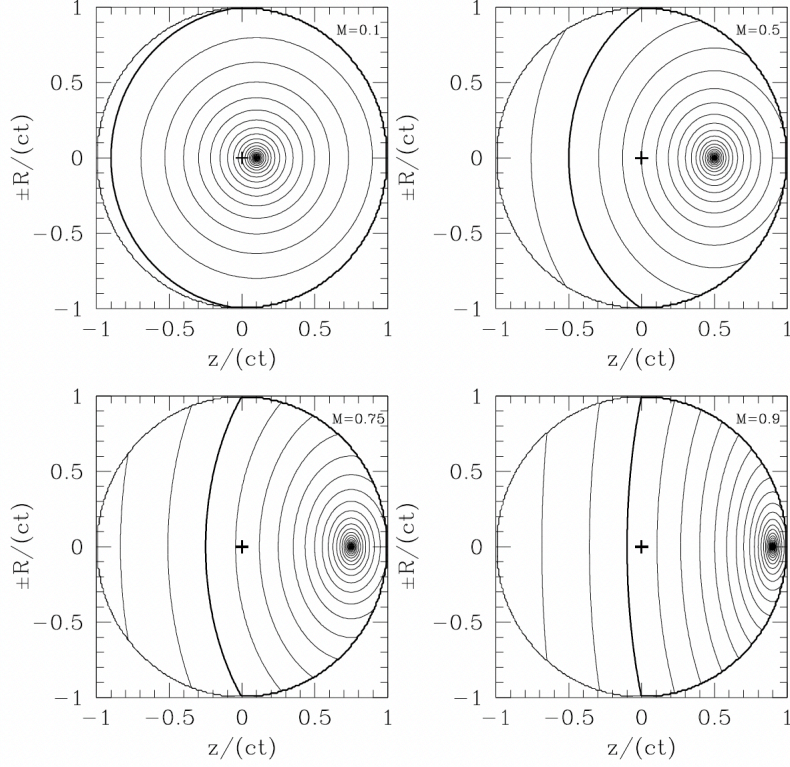


図 2: 垂音速の重力源に対する等密度線のプロファイル. マッハ数が $M = 0.1, 0.5, 0.75, 0.9$ の場合について図示されている. 図中のプラスマークは重力源の位置を表す. [1] より引用.

を意味していることがわかる. 以上を課したうえで整理すると, 同値な不等式として

$$R^2 + z^2 > (c_s t)^2, \quad (33)$$

が得られる.

以上より, 密度摂動に関する結果をまとめると,

$$\alpha_s(t, \boldsymbol{x}) = \frac{GM_p/c_s^2}{[s^2 + R^2(1 - M^2)]^{1/2}} \times \begin{cases} 1, & (R^2 + z^2 < (c_s t)^2), \\ 2, & (R^2 + z^2 > (c_s t)^2, M > 1, s/R < -(\mathcal{M}^2 - 1)^{1/2} z > c_s t/M), \\ 0, & (\text{otherwise}), \end{cases} \quad (34)$$

となる. 密度摂動のプロファイルの様子は, 摂動天体の速度が垂音速の場合を図 2, 超音速の場合を図 3 に示した. 垂音速の場合は密度一定面が楕円状, 超音速の場合は双曲状になっているのが特徴である.

ここまでの議論は, 線形摂動を扱っていたので, $\alpha \ll 1$ が暗に仮定されていた. つまり, この議論の適用範囲は,

$$\frac{GM_p}{c_s^2} \ll [s^2 + R^2(1 - M^2)]^{1/2}, \quad (35)$$

である. 左辺はボンディ半径を表しており, 右辺は大雑把には注目する点までの距離を表している. すなわち, ここまでの線形摂動に関する議論はボンディ半径の十分外側でのみ成り立つものであり, ボンディ半径付近やその内側では非線形な効果が効いてきて, 結果として得られる力学的摩擦の値は線形理論から導出されるものと異なる. これらの非線形領域も含めた力学的摩擦に関しては, 後に様々な数値シミュレーションが行われている ([2], [3] 等).

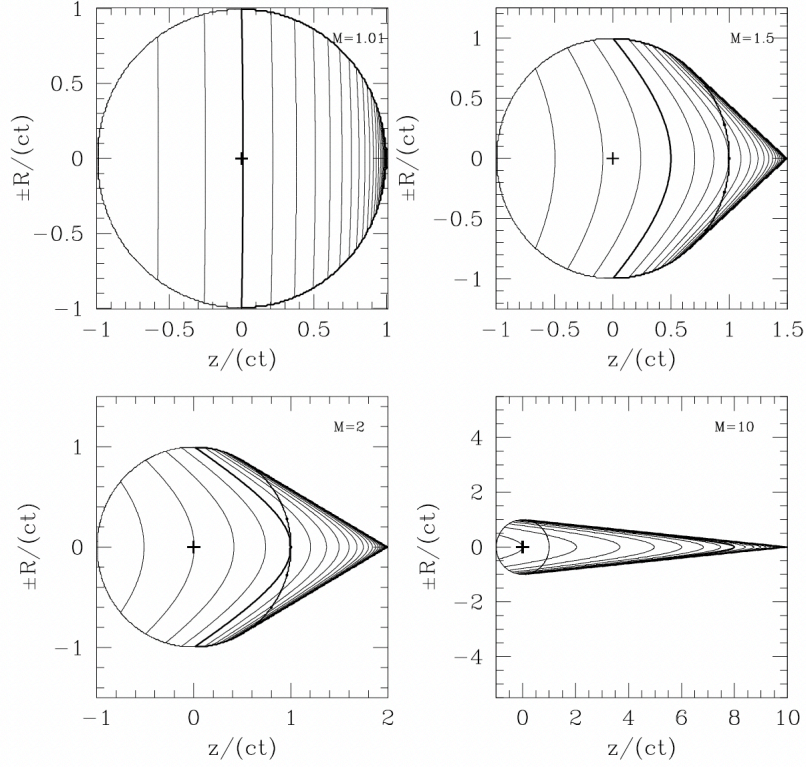


図 3: 超音速の重力源に対する等密度線のプロファイル. マッハ数が $M = 1.01, 1.5, 2, 10$ の場合について図示されている. 図中のプラスマークは重力源の位置を表す. [1] より引用.

4 力学的摩擦の公式

さて, 以上により密度摂動の値が求められたので, これを用いて天体がガスから受ける力学的摩擦の値を計算する. これは, 天体が作った密度摂動によるガスの重力がもととなるため,

$$F_{\text{DF}} = \int dV \rho_0 \alpha(t, \mathbf{x}) \frac{GM_p s}{(s^2 + R^2)^{3/2}}, \quad (36)$$

で計算することができる. $dV = 2\pi R dR ds$ であるから,

$$F_{\text{DF}} = 2\pi GM_p \rho_0 \int ds \int dR R \frac{\alpha(t, \mathbf{x}) s}{(s^2 + R^2)^{3/2}}, \quad (37)$$

と書ける. ここで, $R = r \sin \theta$, $s = r \cos \theta$ と変数変換すると,

$$F_{\text{DF}} = \int d\theta \sin \theta \int dr \frac{GM_p / c_s^2}{r \{(1 - M^2) + M^2 \cos^2 \theta\}^{1/2}} \cos \theta \psi_\theta, \quad (38)$$

となる. ψ_θ は密度摂動 (34) の分枝部分を表す. 更に, $\mu = \cos \theta$, $x = r/c_s t$ と変数変換すると,

$$F_{\text{DF}} = \frac{GM_p}{c_s^2} \int \frac{dx}{x} \int d\mu \frac{\mu \psi_\theta}{(1 - M^2 + M^2 \mu^2)^{1/2}} := -\mathcal{F}I, \quad (39)$$

が得られる. ここで,

$$\mathcal{F} = \frac{4\pi (GM_p)^2 \rho_0}{v_p^2}, \quad (40)$$

$$I = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} \int d\mu \frac{\mu M^2 \psi_\theta}{(1 - M^2 + M^2 \mu^2)^{1/2}}, \quad (41)$$

である. 以下, 2つの場合について積分を計算する.

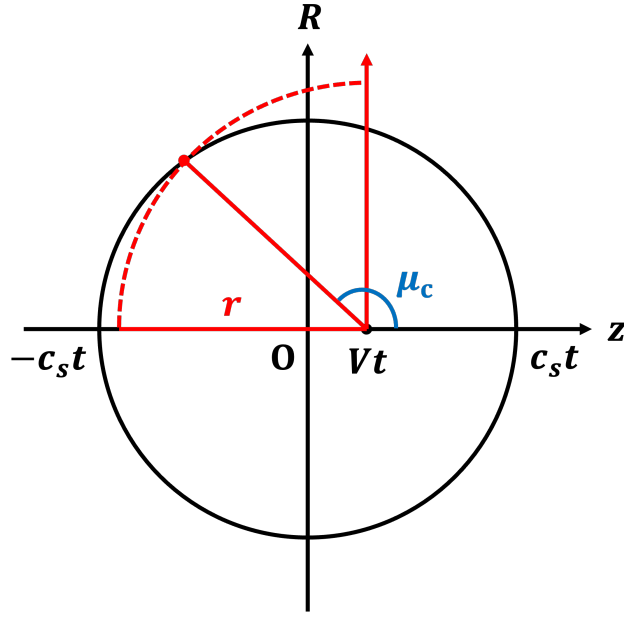


図 4: 亜音速の場合の積分 I_{subsonic} について、積分範囲を理解するための図.

4.1 摂動源が定常の場合

まず、定常状態に関して、 $M < 1$ の場合、 μ 積分の値がゼロとなり (積分範囲は $\mu : [-1, 1]$), 力学的摩擦の値もゼロとなる. $M > 1$ の場合、角度積分の範囲は $\mu : [-1, \mu_M]$ であり、 $\mu_M := -(M^2 - 1)^{1/2}/M$ は Mach cone の境界を表す. よって、角度積分だけ取り出すと、

$$\int_{-1}^{\mu_M} d\mu \frac{\mu M^2 \psi_\theta}{(1 - M^2 + M^2 \mu^2)^{1/2}} = \int_1^{k_M} \psi_\theta M^2 \cdot \frac{dk}{2M^2} k^{-1/2}, = -\psi_\theta, \quad (42)$$

である. ここで、第 2 の等号では $1 - M^2 + M^2 \mu^2 = k$ と変数変換し、第 3 の等号では $k_M = 0$ であることを用いた. よって、

$$I = \int \frac{dx}{x} = \log \left(\frac{r_{\max}}{r_{\min}} \right), \quad (43)$$

が得られる.

4.2 摂動源が非定常な場合

次に、前と同様に $t = 0$ に摂動天体が現れた場合を考える. $M < 1$ の場合、 $0 < r < c_s t - Vt$ での積分は、角度積分の対称性からゼロになる. 最終的に寄与があるのは、図 4 の積分範囲のみである. ここで、図 4 に現れる μ_c の値は、

$$\mu_c = \frac{1 - M^2 - x^2}{2xM}, \quad (44)$$

である. 以上から、

$$\begin{aligned} I_{\text{subsonic}} &= -\frac{1}{2} \int_{1-M}^{1+M} \frac{dx}{x} \int_{-1}^{\mu_c} d\mu \frac{\mu M^2 \psi_\theta}{(1 - M^2 + M^2 \mu^2)^{1/2}}, \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x - \frac{(1 - M^2)}{2x} - \log x \right]_{1-M}^{1+M}, \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + M}{1 - M} \right) - M, \end{aligned} \quad (45)$$

となる. ここで、第 2 の等号では $1 - M^2 + M^2 \mu^2 = k$ と変数変換を行い、 k に関して積分を行った. 摂動源の速度が音速に比べて十分遅いとき、すなわち $M \ll 1$ のとき、 $I_{\text{subsonic}} \rightarrow M^3/3$ となり、摩擦の大きさは摂動天体の速度 v_p に比例する.

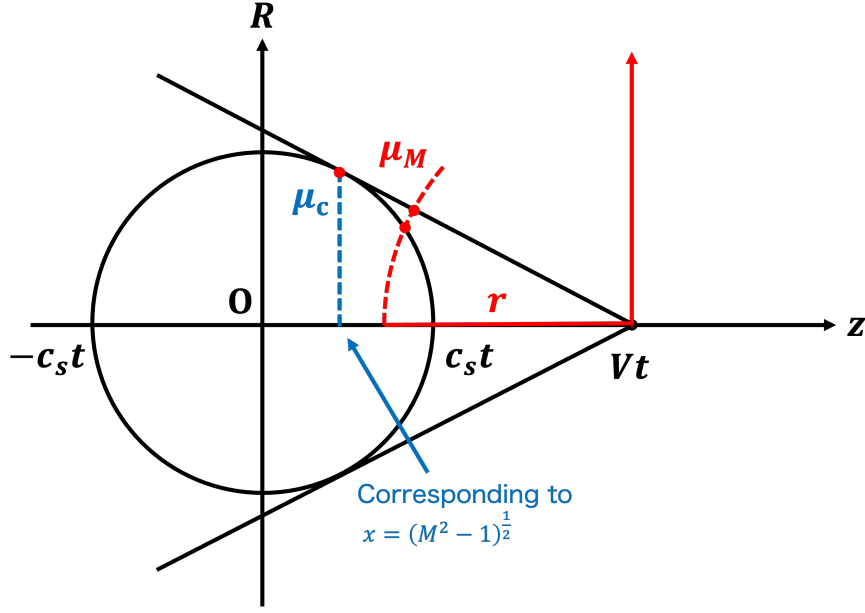


図 5: 超音速の場合の積分 $I_{\text{supersonic}}$ について, 積分範囲を理解するための図.

$M > 1$ の場合, $R - z$ 平面上の円 $R^2 + z^2 = (c_s t)^2$ の内外で ψ_θ の値が異なる. よって, 円の内部と外部で別々に積分を考えなければならない. 円の外部における積分範囲は, $r : [r_{\min}, v_p t - c_s t], \mu : [-1, \mu_M]$ であり, 円の内部における積分範囲は, $r : [v_p t - c_s t, v_p t + c_s t], \mu : [-1, \mu_c]$ である. ここで, r_{\min} は積分の発散を避けるために導入した. r_{\min} に関しては, 積分範囲の符号逆転を避けるため $v_p t - c_s t > r_{\min}$ を仮定している. 以上より,

$$\begin{aligned}
I_{\text{supersonic}} &= -\frac{1}{2} \int_{r_{\min}/c_s t}^{\mathcal{M}-1} \frac{dx}{x} \int_{-1}^{\mu_M} d\mu \frac{\mu \mathcal{M}^2 \psi_\theta}{(1 - \mathcal{M}^2 + \mathcal{M}^2 \mu^2)^{1/2}} \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}-1}^{(\mathcal{M}^2-1)^{1/2}} \frac{dx}{x} \left[\int_{-1}^{\mu_c} d\mu + \int_{\mu_c}^{\mu_M} d\mu \right] - \frac{1}{2} \int_{(\mathcal{M}^2-1)^{1/2}}^{\mathcal{M}+1} \frac{dx}{x} \int_{-1}^{\mu_c} d\mu, \\
&= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \mathcal{M}}{1 - \mathcal{M}} \right) + \ln \left(\frac{\mathcal{M} - 1}{r_{\min}/c_s t} \right),
\end{aligned} \tag{46}$$

となる. $\mathcal{M} \gg 1$ なる極限においては, $I_{\text{supersonic}} \rightarrow \ln(v_p t/r_{\min})$ となり, $v_p t \rightarrow r_{\max}$ と置き換えると, 定常時の結果を再現する.

これらの結果を横軸をマッハ数, 縦軸を力学的摩擦の大きさ (\mathcal{F} で規格化) で表したものが図 6 である. 前述の通り, Gas Dynamical Friction の大きさは, マッハ数が大きい極限ではチャンドラセカールによって導入された無衝突媒質中での摩擦の大きさと一致し, 速度が大きくなるほどその値が小さくなる. これは, 速すぎる天体には加速度がかかりにくいことを意味しており, 直観的にも理解できる. しかし, 天体が亜音速で運動するときには, チャンドラセカールによる見積もりよりも数倍程度摩擦が大きくなる. これは, 直観的にはガスが無衝突媒質に比べて運動量を輸送しやすいのでより大きな力が働くとして理解することができる.

5 まとめ

流体に対する摂動展開によって得られた Gas Dynamical Friction の公式は, 以下のようにまとめられる:

$$F_{\text{DF}} = -\frac{4\pi(GM_p)^2 \rho_0}{v_p^2} \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\mathcal{M}}{1-\mathcal{M}} \right) - \mathcal{M}, & (0 < \mathcal{M} < 1), \\ \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\mathcal{M}}{1-\mathcal{M}} \right) + \ln \left(\frac{\mathcal{M}-1}{r_{\min}/c_s t} \right), & (\mathcal{M} > 1), \end{cases} \tag{47}$$

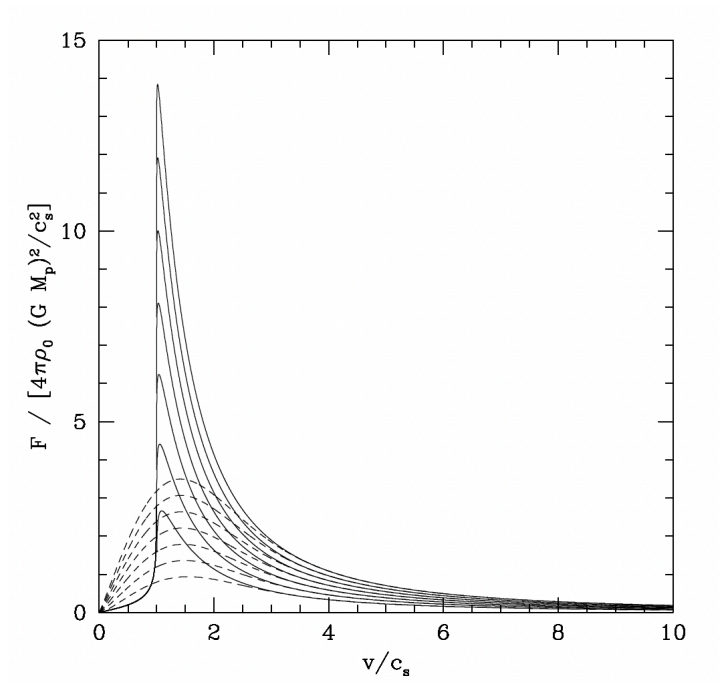


図 6: Gas Dynamical Friction のマッハ数依存性. 図の実線は $\ln(c_s t/r_{\min}) = 4, 6, 8, \dots, 16$ に対応する. 図の破線は $\sigma = c_s, r_{\max} := Vt = \mathcal{M}c_s t$ なる無衝突媒質中での力学的摩擦を表す. [1] より引用.

参考文献

- [1] Ostriker, E. C. 1999, ApJ, 513, 252
- [2] Sánchez-Salcedo, F. J., & Brandenburg, A. 1999, ApJL, 522, L35
- [3] Kim, H., & Kim, W.-T. 2009, ApJ, 703, 1278