超巨大ブラックホール周辺の星の分布

鈴口智也

2024 年 10 月 28 日

1 はじめに

このノートは, 超巨大ブラックホール周辺の星の分布について先行研究をまとめたものである．動機としては, Extreme Mass Ratio Inspiral (EMRI) や, 潮汐破壊現象 (Tidal disruption event; TDE) の発生率を求める際に必要になる情報であるという点が大きく, それなりに歴史もありそうなので調べてみた．基本的に求めたいことは, 超巨大ブラックホール周辺で星同士が重力で相互作用しているときの分布関数の r 依存性と, 分布関数を速度空間で積分して得られる星の数密度プロファイルである．

ちなみに, 特徴的な半径として, 超巨大ブラックホールの重力が卓越する半径,

$$r_h = GM_{\rm BH}/\sigma^2 = 2.3\,{\rm pc}\left(\frac{M_{\rm BH}}{3\times 10^6\,M_\odot}\right)\left(\frac{\sigma}{75\,{\rm km\,s^{-1}}}\right)^{-2}, \tag{1}$$

をとる．ここで, $M_{\rm BH}$ は中心の超巨大ブラックホールの質量, σ は超巨大ブラックホールの周辺に存在する星団のコアにおける速度分散である．また, 時間スケールとしては, だいたい緩和時間,

$$\begin{aligned} t_{\rm relax} &= \frac{0.34\sigma^3}{G^2 M_\star \rho_\star \ln\Lambda} \\ &\simeq 0.95\times 10^{10}\,{\rm yr}\left(\frac{\sigma}{200\,{\rm km\,s^{-1}}}\right)^3\left(\frac{\rho_\star}{10^6\,M_\odot\,{\rm pc}^{-2}}\right)^{-1}\left(\frac{M_\star}{M_\odot}\right)^{-1}\left(\frac{\ln\Lambda}{15}\right)^{-1}, \end{aligned} \tag{2}$$

くらいを考える．後で出てくる無次元化の過程において, 時間スケールはだいたい緩和時間くらいでスケーリングする．

2 Peebles (1972) の議論

以下では, [1] に沿って, 定常状態における星の分布関数と, そこから導かれる数密度の分布を求める．

まず, [1] では, 以下のような ansatz を置いている: 星の分布は球対称かつ運動量空間で等方的であると仮定し, 分布関数は $f = f(r, v)$ と書けるものとする．このとき, r と v の間には $E = GM_{\rm BH}/r - (v^2/2)$ という関係があり, 分布関数は E の冪関数として, $f(r, v) = CE^p$ と書けるものとする．ここで, E は星がもつ単位質量あたりのエネルギーにマイナス符号をつけたものとして定義され, $E > 0$ の星 (つまり, 束縛状態にある星) のみを考える．[1] ポテンシャルエネルギーに対応する項の質量としては, 周囲の星の寄与は考えず, 中心ブラックホールの質量が支配的であると仮定する．

なお, 定常状態においては, 分布関数がボルツマン分布 $f(E) \propto \exp(M_\star E/k_{\rm B}T)$ をとるという帰結が最もらしい．しかし, これを信用すると, 重力ポテンシャルの深きに入れば入るほど, すなわち超巨大ブラックホールに近づけば近づくほど, 星の数が増加し, 超巨大ブラックホール近傍には膨大な数の星が存在するということになる．しかし, 星は超巨大ブラックホールに近づきすぎると潮汐破壊を起こしたり, ブラックホールにそのまま吸収されたりするため, ポテンシャル深くに大量の星が存在するということはない．冪乗分布を仮定したのは, ボルツマン分布のこのような側面が非物理的だからである．

以上の仮定の下で, 定常状態における星の分布関数を計算する．定常状態においては, 半径 r の球に単位時間あたりに流入する星の数が r, t に依らず一定 (つまり, フラックスが一定) となることが期待される．今, 星同士は重力

[1] $E < 0$ の星を考えることもできるが, このような星はすぐに系から出ていくものと仮定し, 除外する．

による 2 体散乱で時事刻々とエネルギーを変化させている．エネルギー E, E' をもつ星を考えたとき，散乱によって単位時間あたりにエネルギーを Δ だけ変化させる確率 (このとき，散乱後のエネルギーは $E+\Delta$, $E'-\Delta$ となると仮定) を $P(E,E',\Delta)\mathrm{d}\Delta$ とする．このとき，E_0 よりも大きいエネルギーをもつ星の数 $N(>E_0)$ の時間変化率は，

$$\frac{\mathrm{d}N(>E_0)}{\mathrm{d}t} = \int_0^{E_0} \mathrm{d}EN(E) \int_0^{E_0} \mathrm{d}E'N(E') \int_{E_0-E}^{\infty} \mathrm{d}\Delta P(E,E',\Delta), \tag{3}$$

と書ける．ここで，(3) 式では，$E, E' < E_0$, $E+\Delta \geq E_0$ となる項のみを書いた．他の場合についても同様の項が書けるが，今見たいのは E_0 のスケーリングだけであり，他の項も同じになるので，ひとまず無視して良い．ここで，$N(E)\mathrm{d}E$ は，エネルギー $[E, E+\mathrm{d}E]$ の範囲に存在する粒子の個数を表す．

確率 $P(E,E',\Delta)\mathrm{d}\Delta$ に関しては，エネルギー E の粒子が体積 $V(\sim r^3 \propto E^{-3})$ に存在し，その典型的な速度が $v(\propto E^{1/2})$ となることから，$(Vv^3)^{-1} \propto E^{3/2}$ に比例することがわかる．ここで，V^{-1} の依存性は粒子の密度から，v^{-3} の依存性は，単位時間あたりに粒子が存在できる領域の体積が，有効断面積 $\propto (v^{-2})^2$ に単位時間に粒子が進む距離 v を掛けたもので表されることから来ている．故に，$P(E_0e, E_0e', E_0\delta)\mathrm{d}(E_0\delta)/P(e,e',\delta)\mathrm{d}\delta = E_0^{3/2}$ となるため，最終的に，

$$P(E_0e, E_0e', E_0\delta) = E_0^{1/2} P(e,e',\delta), \tag{4}$$

となる．以上より，

$$\frac{\mathrm{d}N(>E_0)}{\mathrm{d}t} = \int_0^1 \mathrm{d}eE_0N(E_0e) \int_0^1 \mathrm{d}e'E_0N(E_0e') \int_{1-e}^{\infty} \mathrm{d}(E_0\delta)E_0^{1/2}P(e,e',\delta), \tag{5}$$

となり，$N(E)$ の E 依存性が分かれば，左辺の E_0 依存性が明らかになる．$N(E)$ は，

$$\begin{aligned} N(E)\mathrm{d}E &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{v} \delta\left(E - \frac{GM_{\mathrm{BH}}}{r} + \frac{1}{2}v^2\right) f(r,v)\mathrm{d}E \\ &= (4\pi)^2 CE^p \mathrm{d}E \int_0^{GM_{\mathrm{BH}}/E} \mathrm{d}rr^2 \left(\frac{2GM_{\mathrm{BH}}}{r} - 2E\right)^{1/2} \\ &= 16\sqrt{2}\pi^2 CE^{p-5/2}\mathrm{d}E \int_0^1 \mathrm{d}yy^{3/2}(1-y)^{1/2}, \end{aligned} \tag{6}$$

と書ける．ここで，1 行目から 2 行目の計算ではデルタ関数を v の関数と見て展開し，その後 v 積分を実行した．r の積分領域は 2 行目の被積分関数に関して，根号の中身が正となるべしという条件から決まる．また，2 行目から 3 行目の計算では $y = (E/GM_{\mathrm{BH}})r$ と変数変換を行った．$N(E) \propto E^{p-5/2}$ が分かったので，(5) 式に用いると，

$$\frac{\mathrm{d}N(>E_0)}{\mathrm{d}t} \propto E_0^{2p-3/2}, \tag{7}$$

が得られ，定常状態 (フラックスが一定という条件) では，$p = 3/4$ となることがわかる．

次に，星の数密度分布を導出する．分布関数 $f(E) = CE^p$ と与えられたとき，星の数密度分布 $n(r)$ は，

$$\begin{aligned} n(r) &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{v} f(E) \\ &= 4\pi C \int_0^{\sqrt{2GM_{\mathrm{BH}}/r}} \mathrm{d}vv^2 \left(\frac{GM_{\mathrm{BH}}}{r} - \frac{1}{2}v^2\right)^p \\ &= 4\sqrt{2}\pi C(GM_{\mathrm{BH}})^{p+3/2} r^{-(p+3/2)} \int_0^1 \mathrm{d}yy^{1/2}(1-y)^p, \end{aligned} \tag{8}$$

となる．すなわち，$n(r) \propto r^{-(p+3/2)}$ である．したがって，$p = 3/4$ のとき，$n(r) \propto r^{-9/4}$ となる．

[1] では，半径 r の球を通過する星のフラックスが一定であると仮定して，分布関数と星の数密度分布を導出した．後に，[2] によって示されることだが，このような仮定の下で導かれた分布関数を用いると，フラックスが負の無限大になる．すなわち，中心ブラックホール周辺に存在する星は急速に外へと拡散していくこととなり，非物理的である．

3　Bahcall&Wolf (1976) の議論

以下では, [2] に沿って分布関数がしたがう方程式を導出し, そこから導かれる数密度分布を求める. [2] では, 時間に依存するボルツマン方程式を数値的に解くことによって定常状態における分布関数の形を求めているが, 分布関数の依存性について解析的な見積もりも行っている. ここでは, 解析的な見積もりについて述べる.

BW76 では, 以下のような仮定を置いて議論を進めている:

1. 星の分布は, 球対称かつ運動量空間が等方な一粒子分布関数とする.
2. 中心 BH の質量は星団のコア質量より十分小さいものとする: $M_{\rm BH} \ll M_{\rm core}$.
3. 中心 BH 周辺の星は全て同じ質量 $M_\star$ ($\ll M_{\rm BH}$) をもつとする.
4. 連星を組んだ星の割合は十分小さく, 無視できるものとする.
5. 星同士の衝突による速度変化は, 星が元々持っていた速度に比べて十分小さいものとする.
6. 星は, 単位質量あたりの束縛エネルギーが $E_{\rm D} \sim GM_\star/R_\star$ を超えると, 潮汐破壊されるものとする.

このうち, 仮定 1 から, 分布関数が r と v のみの関数として書けることがわかる. また, 仮定 2 から, 星同士の衝突の時間スケールが軌道周期に比べて十分長く, 衝突の効果が無視できることがすぐにしたがう. [2] このとき, 分布関数は位相空間上の粒子軌道に沿って一定となるため, 仮定 1 と合わせて $E = GM_{\rm BH}/r - v^2/2$ のみで書けることが示される. これらは [1] で置かれていた ansatz を具体的に書いたものであり, 先の論文でも暗に課されていた仮定ということになる. 仮定 2 はまた, $r \lesssim r_h$ ($r_h = GM_{\rm BH}/\sigma^2$) における重力ポテンシャルが中心ブラックホールの寄与のみに支配されることも言っており, [3] これも [1] では暗に仮定されていた.

まず, 粒子数保存則から, ${\rm d}N(E,t){\rm d}E = {\rm d}t[R(E,t) - R(E+{\rm d}E,t)]$, [4] 或いは,

$$\frac{\partial N(E,t)}{\partial t} = -\frac{\partial R(E,t)}{\partial E}, \tag{9}$$

が成り立つ. ここで, $R(E,t)$ はエネルギー E をもち, 単位時間あたりに 2 体衝突によってより高エネルギーな領域に散乱される星の数を表し, 以下で計算する. $N(E,t)$ に関しては, Peebles (1972) の議論と同様にして計算することができ,

$$N(E,t){\rm d}E = \sqrt{2}\pi^3(GM_{\rm BH})^3E^{-5/2}f(E,t){\rm d}E, \tag{10}$$

となる. [5] ここで, $\int_0^1 {\rm d}y y^{3/2}(1-y)^p = 3\sqrt{\pi}\Gamma(p+1)/4\Gamma(p+5/2)$ となることを用いた.

$R(E,t)$ を計算するために, 半径 r において, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ の速度を持った 2 つの粒子が 2 体衝突を起こし, 速度 $\boldsymbol{v}_1'$, $\boldsymbol{v}_2'$ に変化するという状況を考える. このとき, $R(E,t)$ は, ある種単位時間あたりの衝突数として計算され,

$$R(E,t) = \int {\rm d}^3\boldsymbol{r}{\rm d}^3\boldsymbol{v}_1{\rm d}^3\boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|\frac{{\rm d}\sigma}{{\rm d}\Omega}{\rm d}\Omega f(E_1,t)f(E_2,t)S, \tag{11}$$

と書ける. ここで, E_1, E_2 はそれぞれ衝突前の粒子がもつエネルギーを表し, E_1', E_2' はそれぞれ衝突後の粒子がもつエネルギーを表す. S は衝突によるエネルギー交換の性質を表す因子であり,

$$S := \frac{1}{4}[{\rm sign}(E_1'-E) + {\rm sign}(E_2'-E) - {\rm sign}(E_1-E) - {\rm sign}(E_2-E)], \tag{12}$$

と書ける. すなわち, エネルギー E を跨いで高 (低) エネルギー側に向かうとき, $+1(-1)$ になるように定義されている. 以下では, 衝突前, 衝突後の運動に関しては重心系と相対系に分けて考え, それぞれに対応する速度を $\boldsymbol{v}_{\rm M}$, $\boldsymbol{v}_{\rm M}'$, $\boldsymbol{v}_{\rm R}$, $\boldsymbol{v}_{\rm R}'$ と書く. 積分については, ヤコビアンが 1 となるため, ${\rm d}\boldsymbol{v}_1{\rm d}\boldsymbol{v}_2 = {\rm d}\boldsymbol{v}_{\rm M}{\rm d}\boldsymbol{v}_{\rm R}$ である. 便利のため, 微分散

---

[2] 付録で示す.

[3] これも, 付録で示す.

[4] 左辺は $[E, E+{\rm d}E]$ に存在する粒子の個数変化を表しており, 右辺はエネルギー E の粒子はより高エネルギーになると $[E, E+{\rm d}E]$ 領域に入ってくるので正符号, エネルギー $E+{\rm d}E$ の粒子は当該領域から抜けていくので負符号となっている.

[5] 2 節の議論では, $f(E,t)$ の部分に $f(E) = CE^p$ が既に代入されている.

乱断面積の項について, デルタ関数を挿入し, $(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega)\mathrm{d}\Omega = \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}'_{\mathrm{R}} v'^2_{\mathrm{R}}(1/v'^2_{\mathrm{R}})\delta(v'_{\mathrm{R}} - v_{\mathrm{R}})\mathrm{d}\Omega(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega)$ と書き, 更に $1 = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{v}'_{\mathrm{M}}\delta^{(3)}(\boldsymbol{v}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{M}})$ を挿入する. このとき,

$$
\begin{aligned}
R(E,t) = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}_{\mathrm{M}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}'_{\mathrm{M}} \int \mathrm{d}v_{\mathrm{R}} v^2_{\mathrm{R}} \mathrm{d}\Omega_{\mathrm{R}} \int \mathrm{d}v'_{\mathrm{R}} v'^2_{\mathrm{R}} \mathrm{d}\Omega'_{\mathrm{R}} \\
\times v_{\mathrm{R}} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} f(E_1,t) f(E_2,t) \delta^{(3)}(\boldsymbol{v}'_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{M}}) \delta(v'_{\mathrm{R}} - v_{\mathrm{R}}) S,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

となる.

以下, それぞれの積分を実行すれば良い. 計算の詳細は付録に記すことにして, 最終的な結果は,

$$
R(E,t) = \frac{8\sqrt{2}\pi^5}{3} G^5 M_\star^2 M_{\mathrm{BH}}^3 \ln\Lambda \int \mathrm{d}E_2 [\max(E,E_2)]^{-3/2} [f(E,t)(\partial_{E_2} f(E_2,t)) - (\partial_E f(E,t)) f(E_2,t)], \tag{14}
$$

となる.

以上の結果を用いると, 粒子数保存則は $f(E,t)$ の時間発展を表す方程式に書き換えることができ,

$$
\frac{\partial f(E,t)}{\partial t} = -AE^{5/2} \frac{\partial}{\partial E} \left[\int \mathrm{d}E' \{\max(E,E')\}^{-3/2} \{ f(E,t)(\partial_{E'} f(E',t)) - (\partial_E f(E,t)) f(E',t) \} \right], \tag{15}
$$

となる. ここで, $A = (32\pi^2/3)(GM_\star)^2 \ln\Lambda$ である. 少し計算すると, この方程式がいわゆる Fokker-Planck 方程式の形を満たすこともわかる. 方程式 (15) は, 系の典型的な速度分散 σ, 典型的な数密度 n を用いると, 分布関数 f とエネルギー E, 時間 t に関して,

$$
g = \frac{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}{n} f, \quad x = \frac{E}{\sigma^2}, \quad y = \frac{E'}{\sigma^2}, \quad \tau = \frac{An}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} t, \tag{16}
$$

のように無次元化することができる. これにより, 無次元化された時間発展方程式が,

$$
\frac{\partial g(x,\tau)}{\partial \tau} = -x^{5/2} \frac{\partial Q(x,\tau)}{\partial x}, \tag{17}
$$

のように求まる. ここで, $Q(x,\tau)$ は無次元化された粒子フラックスで,

$$
Q(x,\tau) = \int_{-\infty}^{x_{\max}} \mathrm{d}y [\max(x,y)]^{-3/2} [g(x,\tau)\partial_y g(y,\tau) - g(y,\tau)\partial_x g(x,\tau)], \tag{18}
$$

と書ける.

これで, $f(E,t)$ の発展方程式が求まったので, あとは [1] と同様に, 定常解を求めてみる. 例によって, 分布関数がエネルギーの冪で書けると仮定し, $f(E) = CE^p$ と書く.

3.1 フラックス一定の場合

まず考えられる解として, フラックス一定, すなわち $R(E)$ が E に依存しない場合がある具体的に $R(E)$ を計算すると,

$$
\begin{aligned}
R(E) &= pCD \int_0^\infty \mathrm{d}E' [\max(E,E')]^{-3/2} (E^p E'^{p-1} - E'^p E^{p-1}) \\
&= pCDE^{2p-3/2} \int_0^\infty \mathrm{d}z [\max(1,z)]^{-3/2} (z^{p-1} - z^p),
\end{aligned}
\tag{19}
$$

となる. よって, $R(E) = \mathrm{const.}$ のとき, $p = 3/4$ となり, Peebles (1972) の結果を再現する.

このとき, $R(E)$ がとる値を $p = 3/4$ を代入することで確認すると,

$$
R(E) \propto \int_0^1 \mathrm{d}z (z^{-1/4} - z^{3/4}) + \int_1^\infty \mathrm{d}z z^{-3/2} (z^{-1/4} - z^{3/4}) \sim - \int_1^\infty \mathrm{d}z z^{-3/4} \to -\infty, \tag{20}
$$

となる. すなわち, 星は中心ブラックホールから急速に拡散していくという結論になり, 非物理的である.

3.2 ゼロフラックスの場合

次に考えられる解として, 任意の E についてフラックスがゼロ, すなわち $R(E) = 0$ $(\forall E)$ がある. これを満たすための必要条件は, (19) 式で左辺をゼロとして具体的に計算すると,

$$0 = \left[\frac{1}{p(p+1)} - \frac{1}{(p-3/2)(p-1/2)} \right] E^{2p-3/2}, \tag{21}$$

となり, $p = 1/4$ がしたがう. この結果は十分条件も満たすことが示される.

(8) 式を用いて星の数密度分布を計算すると, $n(r) \propto r^{-7/4}$ であることが示される. これがいわゆる Bahcall-Wolf カスプである.

4 Bahcall&Wolf (1977) の議論

[3] では, 3 節における仮定 3 を緩和し, 星の質量が離散的な分布をもつ場合について議論している. 但し, 最大質量の星が最も多いと仮定している. 分布関数は星の質量 m の依存性も持つため, $f(x,m) = \mathrm{d}N/\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\mathrm{d}m$ と書ける.

この場合も, 基本的には 3 節の場合と同様にして星のフラックスを計算することができる. 具体的な計算は省略するが, 無次元化された星のフラックスは結果だけ書くと,

$$Q(x,m) = \int_{m_{\min}}^{m_{\max}} \mathrm{d}m' m' \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \mathrm{d}x' [\max(x,x')]^{-3/2} [m f(x,m) \partial_{x'} f(x',m') - m' f(x',m') \partial_x f(x,m)], \tag{22}$$

となる. 分布関数の時間発展を表す方程式は $Q(x,\tau)$ の形を除いて 3 節の結果と全く同じである. [6]

このとき, すべての質量集団について同時にゼロフラックスが満たされると仮定すると, $p(x,m) = \partial \log f(x,m)/\partial x$ に対して,

$$p(x,m_1) = p(x,m_2) \frac{m_1}{m_2}, \tag{23}$$

が成り立つ. これは, 以下のようにして示すことができる (Linial&Sari (2022) を参考にした). まず, $Q(x,m_1) = Q(x,m_2) = 0$ から,

$$Q(x,m_1) f(x,m_2) m_2 - Q(x,m_2) f(x,m_1) m_1 = 0, \tag{24}$$

が成り立つ. この式の左辺を具体的に計算する. p の定義より, $\partial_x f(x,m_i) = p(x,m_i) f(x,m_i)/x$ と書ける. 故に,

$$\begin{aligned} Q(x,m_i) = {} & f(x,m_i) m_i \int_{m_{\min}}^{m_{\max}} \mathrm{d}m' m' \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \mathrm{d}x' [\max(x,x')]^{-3/2} f(x',m') \frac{p(x',m')}{x} \\ & - f(x,m_i) \frac{p(x,m_i)}{x} \int_{m_{\min}}^{m_{\max}} \mathrm{d}m' m' \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \mathrm{d}x' [\max(x,x')]^{-3/2} f(x',m') m', \end{aligned} \tag{25}$$

となる. これを (24) 式に代入すると,

$$0 = [m_1 p(x,m_2) - m_2 p(x,m_1)] \int_{m_{\min}}^{m_{\max}} \mathrm{d}m' (m')^2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \mathrm{d}x' [\max(x,x')]^{-3/2} f(x',m'), \tag{26}$$

がしたがう. よって, (23) 式が成り立つ.

[3] では, 最大質量の星が最も数が多いと仮定しているため, これらの星は単一質量のプロファイル (Bahcall-Wolf プロファイル) を示すことが予測される. すなわち, $f_{\mathrm{H}} \propto x^{1/4}$ となる. 一方で, (23) 式から, $m < m_{\max}$ の星に関しては, $f_{\mathrm{L}} \propto x^{m/4m_{\max}}$ となることがわかる. 以上より, 星の数密度分布は (8) 式から, $n_{\mathrm{L}}(r) \propto r^{-(3/2+m/4m_{\max})}$, $n_{\mathrm{H}}(r) \propto r^{-7/4}$ となる.

5 その後の進展

この節では, 超巨大ブラックホール周辺の星の分布について, 最近の進展について述べる.

[6] [3] では, ロス・コーン項も含めた発展方程式を提示しているが, 詳しくは後述することにする.

5.1 Alexander&Hopman (2009)

[4] は, 4 節の議論をより現実的な系へと拡張している. BW77 では, 最も重い星が最も数多く存在すると仮定していた. しかし, 実際は星の初期質量関数の形からもわかるとおり, 軽い星の方が数が多く, 質量が大きくなるほど数は少なくなる. その結果, 質量の大きい星は軽い星による力学的摩擦によって内側へと沈みやすくなる. [4] ではパラメータとして $\Delta = 4N_{\rm H}M_{\rm H}^2/[N_{\rm L}M_{\rm L}^2(3+M_{\rm H}/M_{\rm L})]$ を導入し, 大質量星が比較的偏在している場合 ($\Delta \gg 1$) と, 比較的珍しい場合 ($\Delta \ll 1$) に対して分布関数の時間発展方程式を数値的に解いて定常解を求めている. その結果, 大質量星が珍しい場合に関しては, 軽い星の分布は Bahcall-Wolf プロファイルで表されるのに対して, 重い星はより傾きの大きいプロファイルとなることがわかり, 最大質量の星に関しては, $n_{\rm H} \propto r^{-11/4}$ となることが示された.

参考文献

[1] Peebles, P. J. E., 1972, ApJ, 178, 371

[2] Bahcall, J. N. & Wolf, R., A., 1976, ApJ, 209, 214

[3] Bahcall, J. N. & Wolf, R., A., 1977, ApJ, 216, 883

[4] Alexander, T. & Hopman, C., 2009, ApJ, 697, 1861

[5] Linial, I., & Sari, R., 2022, ApJ, 940, 101

A Bahcall&Wolf (1976) の仮定から導かれる諸々

A.1 時間スケールの比較

3 節でも述べたが, 仮定 2 から, 星同士が衝突を起こすまでの時間スケール $\tau_{\rm col}$ は星の軌道時間 $\tau_{\rm orb}$ に比べて十分長くなる. 以下で, これについて示す.

まず, $\tau_{\rm col}$ を求めるに当たって, 単位時間あたりに衝突する星の個数は, 星の有効断面積 $(GM_\star/v^2)^2$ に速度 v と星の数密度 n を掛けることによって算出される. これの逆数が衝突までにかかる時間スケールとなるため, $\tau_{\rm col} \sim v^3/(GM_\star)^2 n$ となる. 一方, 星の軌道時間は $\tau_{\rm orb} \sim r/v$ で与えられる. 今, 星が存在する典型的な半径として $r \sim r_h$, 星の典型的な数密度として, 星団コアにおける星の数密度 $n \sim n_0$ をとると,

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{\rm col}}{\tau_{\rm orb}} &\sim \frac{\sigma^6}{G^3 M_{\rm BH} M_\star^2 n_0},\\ &\sim \frac{\sigma^6 r_{\rm core}^3}{G^3 M_{\rm BH} M_\star M_{\rm core}},\end{aligned} \tag{27}$$

となる. ここで, 2 番目の等式において, コア質量 $M_{\rm core} \sim r_{\rm core}^3 n_0 M_\star$ を用いた. Peterson&King (1975) より, $GM_{\rm core}/r_{\rm core} \sim \sigma^2$ となり, これを用いると,

$$\frac{\tau_{\rm col}}{\tau_{\rm orb}} \sim \frac{M_{\rm core}^2}{M_{\rm BH} M_\star} \gg 1, \tag{28}$$

がしたがう. 故に, 衝突時間スケールが軌道時間に比べて十分長くなることが示される.

A.2 支配的な質量

仮定 2 から, $r \lesssim r_h$ における重力ポテンシャルでは, 超巨大ブラックホール質量の寄与が支配的になる. 以下ではこれを示す. 示すべきは,

$$M_\star \int_0^{r_h} {\rm d}r 4\pi r^2 n(r) \ll M_{\rm BH}, \tag{29}$$

である．左辺は $r \lesssim r_h$ に含まれる星の総質量を表す．前節と同じく密度の典型値を用いると，

$$
\begin{aligned}
\frac{M_\star}{M_{\mathrm{BH}}}\int_0^{r_h}\mathrm{d}r4\pi r^2 n(r) &\sim \frac{M_\star}{M_{\mathrm{BH}}} r_h^3 n_0 \\
&\sim \frac{M_{\mathrm{BH}}}{M_{\mathrm{core}}} \ll 1,
\end{aligned}
\tag{30}
$$

となることがわかる．ここで，一番最後で仮定 2 を用いた．したがって，超巨大ブラックホール質量が重力ポテンシャルに対して支配的な寄与をもつ．

B　Bahcall&Wolf (1976) のフラックスの導出

この節では，3 で導入した $R(E,t)$ の具体的導出を行う．

まず，$R(E,t)$ を計算するために，半径 r において，$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ の速度を持った 2 つの粒子が 2 体衝突を起こし，速度 $\boldsymbol{v}_1'$, $\boldsymbol{v}_2'$ に変化するという状況を考える．このとき，$R(E,t)$ は，ある種単位時間あたりの衝突数として計算され，

$$
R(E,t) = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}_1\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Omega f(E_1,t)f(E_2,t)S,
\tag{31}
$$

と書ける．ここで，E_1, E_2 はそれぞれ衝突前の粒子がもつエネルギーを表し，E_1', E_2' はそれぞれ衝突後の粒子がもつエネルギーを表す．S は衝突によるエネルギー交換の性質を表す因子であり，

$$
S := \frac{1}{4}[\mathrm{sign}(E_1'-E)+\mathrm{sign}(E_2'-E)-\mathrm{sign}(E_1-E)-\mathrm{sign}(E_2-E)],
\tag{32}
$$

と書ける．すなわち，エネルギー E を跨いで高 (低) エネルギー側に向かうとき，$+1(-1)$ になるように定義されている．以下では，衝突前，衝突後の運動に関しては重心系と相対系に分けて考え，それぞれに対応する速度を $\boldsymbol{v}_{\mathrm{M}}$, $\boldsymbol{v}_{\mathrm{M}}'$, $\boldsymbol{v}_{\mathrm{R}}$, $\boldsymbol{v}_{\mathrm{R}}'$ と書く．積分については，ヤコビアンが 1 となるため，$\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2 = \mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{M}}\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{R}}$ である．便利のため，微分散乱断面積の項について，デルタ関数を挿入し，$(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega)\mathrm{d}\Omega = \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_R' v_{\mathrm{R}}'^2(1/v_{\mathrm{R}}'^2)\delta(v_{\mathrm{R}}'-v_{\mathrm{R}})\mathrm{d}\Omega(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega)$ と書き，更に $1=\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{v}_{\mathrm{M}}'\delta^{(3)}(\boldsymbol{v}_{\mathrm{M}}-\boldsymbol{v}_{\mathrm{M}})$ を挿入する．このとき，

$$
\begin{aligned}
R(E,t) = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}_{\mathrm{M}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}_{\mathrm{M}}' \int \mathrm{d}v_{\mathrm{R}} v_{\mathrm{R}}^2 \mathrm{d}\Omega_{\mathrm{R}} \int \mathrm{d}v_{\mathrm{R}}' v_{\mathrm{R}}'^2 \mathrm{d}\Omega_{\mathrm{R}}' \\
\times v_{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} f(E_1,t)f(E_2,t)\delta^{(3)}(\boldsymbol{v}_{\mathrm{M}}'-\boldsymbol{v}_{\mathrm{M}})\delta(v_{\mathrm{R}}'-v_{\mathrm{R}})S,
\end{aligned}
\tag{33}
$$

となる．

以下，それぞれの積分を実行すれば良い．まず，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{M}}$, $\boldsymbol{v}_{\mathrm{M}}'$ の積分について，変数変換を行う．具体的には，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{R}}$ と v_{M} のなす角を α, 対応する方位角を Φ とし，(E_1,E_2,Φ) へと変数を変換する．最初，極座標を用いて $\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}_{\mathrm{M}} = \mathrm{d}v_{\mathrm{M}}v_{\mathrm{M}}^2\mathrm{d}\alpha\sin\alpha\mathrm{d}\Phi$ と変換し，その後 v_{M} と α を E_1, E_2 に変換する．このとき，ヤコビアン J は，

$$
J = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial v_{\mathrm{M}}}{\partial E_1} & \frac{\partial v_{\mathrm{M}}}{\partial E_2} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial E_1} & \frac{\partial \alpha}{\partial E_2} \end{pmatrix},
\tag{34}
$$

となる．$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_{\mathrm{M}} + (1/2)\boldsymbol{v}_{\mathrm{R}}$, $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_{\mathrm{M}} - (1/2)\boldsymbol{v}_{\mathrm{R}}$ であるから，

$$
E_1 = \frac{GM_{\mathrm{BH}}}{r} - \frac{1}{2}\left(v_{\mathrm{M}}^2 + \frac{1}{4}v_{\mathrm{R}}^2 + \boldsymbol{v}_{\mathrm{R}}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{M}}\right),
\tag{35}
$$

$$
E_2 = \frac{GM_{\mathrm{BH}}}{r} - \frac{1}{2}\left(v_{\mathrm{M}}^2 + \frac{1}{4}v_{\mathrm{R}}^2 - \boldsymbol{v}_{\mathrm{R}}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{M}}\right),
\tag{36}
$$

となる．よって，

$$
E_1 + E_2 = \frac{2GM_{\mathrm{BH}}}{r} - \left(v_{\mathrm{M}}^2 + \frac{1}{4}v_{\mathrm{R}}^2\right),
\tag{37}
$$

$$
\cos\alpha = \frac{E_2-E_1}{v_{\mathrm{R}}v_{\mathrm{M}}},
\tag{38}
$$

となる． これらの式を用いるとヤコビアン J を計算することができる． 第一式の微分を考えることにより，$\partial v_{\mathrm{M}}/\partial E_{1(2)} = -1/2v_{\mathrm{M}}$ が得られ，第二式の微分を考えることにより，$\partial\alpha/\partial E_1 = 1/v_{\mathrm{R}}v_{\mathrm{M}}\sin\alpha$, $\partial\alpha/\partial E_2 =$

$-1/v_{\rm R}v_{\rm M}\sin\alpha$ が得られる. 以上より, ヤコビアンは, $J=(v_{\rm M}^2 v_{\rm R}\sin\alpha)^{-1}$ となり, 結果として, $\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}_{\rm M}=(1/v_{\rm R})\mathrm{d}E_1\mathrm{d}E_2\mathrm{d}\Phi$ が得られる. プライム付きの文字に関しても同様である.

次に, デルタ関数 $\delta^{(3)}(\boldsymbol{v}'_{\rm M}-\boldsymbol{v}_{\rm M})$ を整理する. θ を $\boldsymbol{v}_{\rm R}$ と $\boldsymbol{v}'_{\rm R}$ がなす角, θ' を $\boldsymbol{v}'_{\rm R}$ と $\boldsymbol{v}'_{\rm M}$ がなす角とし, 後者に対する方位角を Φ' とする. プライム付きの系において, $\boldsymbol{v}'_{\rm M}$ を極座標で成分表示すると, $\boldsymbol{v}'_{\rm M}=v'_{\rm M}=(\sin\theta'\cos\Phi',\sin\theta'\sin\Phi',\cos\theta')$ である. ここで, プライム付きの系はプライムなしの系を y 軸を中心として (但し, プライムなしの系は $\boldsymbol{v}_{\rm R}$ の方向を z 軸にとっている), 角度 θ だけ回転させたものになっている. プライムなしの系での $\boldsymbol{v}'_{\rm M}$ の成分表示を $\boldsymbol{v}'_{\rm M}=v'_{\rm M}(\sin\beta\cos\gamma,\sin\beta\sin\gamma,\cos\beta)$ とおくと, 回転行列を考えることにより,

$$\cos\beta=-\sin\theta\sin\theta'\cos\Phi'+\cos\theta\cos\theta', \tag{39}$$

$$\tan\gamma=\frac{\sin\theta'\sin\Phi'}{\cos\theta\sin\theta'\cos\Phi'+\sin\theta\cos\theta'}, \tag{40}$$

と書けることがわかる. このとき,

$$\delta^{(3)}(\boldsymbol{v}'_{\rm M}-\boldsymbol{v}_{\rm M})=\frac{v_{\rm M}^2\sin\alpha}{\delta(v'_{\rm M}-v_{\rm M})\delta(\alpha-\beta)\delta(\Phi-\gamma)}, \tag{41}$$

となる. これを順に整理していく.

まず, $\delta(v'_{\rm M}-v_{\rm M})$ については見る. $v'_{\rm M}$ を $E'_1+E'_2$ の関数として見ると,

$$v'^2_{\rm M}=\frac{2GM_{\rm BH}}{r}-(E'_1+E'_2)-\frac{1}{4}v'^2_{\rm R}, \tag{42}$$

より, $\partial v'_{\rm M}/\partial(E'_1+E'_2)=-1/2v'_{\rm M}$ である. $g(E'_1+E'_2)=v'_{\rm M}-v_{\rm M}$ とおくと,

$$\begin{aligned}\delta(g(E'_1+E'_2))&=\frac{\delta\left((E'_1+E'_2)-(v'_{\rm M}=v_{\rm M}\text{の解})\right)}{\left|g'(E'_1+E'_2)|_{v'_{\rm M}=v_{\rm M}}\right|}\\&=2v_{\rm M}\delta\left((E'_1+E'_2)-\left\{(E_1+E_2)-\frac{1}{4}(v'^2_{\rm R}-v^2_{\rm R})\right\}\right),\end{aligned} \tag{43}$$

が得られる. ここで, $g'(E'_1+E'_2)=-1/2v'_{\rm M}$ であることと, $v'_{\rm M}=v_{\rm M}$ の解が, $E'_1+E'_2=(E_1+E_2)-(1/4)(v'^2_{\rm R}-v^2_{\rm R})$ を満たすことを用いた.

次に, $\delta(\alpha-\beta)$ について見る. $h(\Phi')=\alpha-\beta$ とおき, $h(\Phi')=0$ を満たす Φ' を $\Phi'=\Phi_0$ とする. このとき, (39) 式において $\beta=\alpha$ を代入すると,

$$\cos\Phi'_0=\frac{\cos\theta\cos\theta'-\cos\alpha}{\sin\theta\sin\theta'}, \tag{44}$$

となる. $[0,2\pi]$ の範囲において, これを満たす Φ'_0 は 2 個存在し, 各々を $\Phi'^{(1)}_0$, $\Phi'^{(2)}_0$ とおくと,

$$\begin{aligned}\delta(h(\Phi'))&=\sum_{\Phi'_0=\Phi'^{(1)}_0,\Phi'^{(2)}_0}\frac{\delta(\Phi'-\Phi'_0)}{|h'(\Phi')|_{\alpha=\beta}|}\\&=2\sin\alpha\left[\sin^2\theta\sin^2\alpha-(\cos\theta'-\cos\theta\cos\alpha)^2\right]^{-1/2}\delta(\Phi'-\Phi'_0),\end{aligned} \tag{45}$$

となる. ここで, 分母の $h(\Phi')$ の微分については, 少々複雑な計算をしている. まず, $\mathrm{d}h/\mathrm{d}\Phi'=-\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}\Phi'$ である. この式の右辺については, (39) 式より, $\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}\Phi'=-\sin\theta\sin\theta'\sin\Phi'/\sin\beta$ と計算できる. これに対して, $\Phi'_0=\Phi'_0$, $\beta=\alpha$ を代入し, (44) 式を用いると,

$$h'(\Phi')|_{\alpha=\beta}=\frac{1}{\sin\alpha}\left[\sin^2\theta\sin^2\theta'-(\cos\theta\cos\theta'-\cos\alpha)^2\right]^{1/2}, \tag{46}$$

が求まる. 括弧の中を適当に変形すると, (45) 式と同様の形になる.

ここで, $\boldsymbol{v}_{\rm M}$, $\boldsymbol{v}'_{\rm M}$ に関する積分を整理すると,

$$\begin{aligned}\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}_{\rm M}\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}'_{\rm M}\delta^{(3)}(\boldsymbol{v}'_{\rm M}-\boldsymbol{v}_{\rm M})=\int&\mathrm{d}E_1\mathrm{d}E_2\mathrm{d}E'_1\mathrm{d}E'_2\mathrm{d}\Phi\mathrm{d}\Phi'\\&\times\frac{1}{v_{\rm M}^2\sin\alpha}\delta(v'_{\rm M}-v_{\rm M})\delta(\alpha-\beta)\delta(\Phi-\gamma),\end{aligned} \tag{47}$$

と書ける. 角度積分に関しては,

$$\int \mathrm{d}\Phi \mathrm{d}\Phi' \frac{1}{\sin\alpha}\delta(\alpha-\beta)\delta(\Phi-\gamma) = 2\int \mathrm{d}\Phi' \left[\sin^2\theta\sin^2\alpha - (\cos\theta' - \cos theta\cos\alpha)^2\right]^{-1/2} \\ \times \delta(\Phi' - \Phi'_0) \\ = 2\left[\sin^2\theta\sin^2\alpha - (\cos\theta' - \cos\theta\cos\alpha)^2\right]^{-1/2}, \tag{48}$$

となる. 結果を P と置く. 残りの積分に関しては,

$$\int \mathrm{d}E_1\mathrm{d}E_2\mathrm{d}E'_1\mathrm{d}E'_2 \frac{1}{v_{\mathrm{M}}^2}\delta(v'_{\mathrm{M}} - v_{\mathrm{M}}) = 2\int \mathrm{d}E_1\mathrm{d}E_2\mathrm{d}E'_1\mathrm{d}E'_2 \frac{\delta\left((E'_1+E'_2) - \left\{(E_1+E_2) - \frac{1}{4}(v'^2_{\mathrm{R}} - v^2_{\mathrm{R}})\right\}\right)}{\left[\frac{2GM_{\mathrm{BH}}}{r} - (E_1+E_2) - \frac{1}{4}v_{\mathrm{R}}^2\right]^{1/2}}, \tag{49}$$

となる.

以上より,

$$R(E,t) = \int \mathrm{d}E_1\mathrm{d}E_2\mathrm{d}E'_1\mathrm{d}E'_2\delta(E'_1+E'_2-E_1-E_2)\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\int \mathrm{d}v_{\mathrm{R}}v_{\mathrm{R}}^2\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{R}}\int \mathrm{d}v'_{\mathrm{R}}v'^2_{\mathrm{R}}\mathrm{d}\Omega'_{\mathrm{R}} \\ \times v_{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}f(E_1,t)f(E_2,t)\frac{1}{v_{\mathrm{R}}v'_{\mathrm{R}}}\cdot 2\delta\left((E'_1+E'_2) - \left\{(E_1+E_2) - \frac{1}{4}(v'^2_{\mathrm{R}} - v^2_{\mathrm{R}})\right\}\right) \\ \times \left[\frac{2GM_{\mathrm{BH}}}{r} - (E_1+E_2) - \frac{1}{4}v_{\mathrm{R}}^2\right]^{-1/2} SP\delta(v'_{\mathrm{R}} - v_{\mathrm{R}}), \tag{50}$$

となる. v'_{R} の積分を実行すると,

$$R(E,t) = 2\int \mathrm{d}E_1\mathrm{d}E_2\mathrm{d}E'_1\mathrm{d}E'_2\delta(E'_1+E'_2-E_1-E_2)\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\int \mathrm{d}v_{\mathrm{R}}v_{\mathrm{R}}\int \mathrm{d}\Omega_{\mathrm{R}}\int \mathrm{d}\Omega'_{\mathrm{R}} \\ \times \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(v_{\mathrm{R}},\theta)f(E_1,t)f(E_2,t)SP\left[\frac{2GM_{\mathrm{BH}}}{r} - (E_1+E_2) - \frac{1}{4}v_{\mathrm{R}}^2\right]^{-1/2}, \tag{51}$$

が得られる.

ここで, P について, 仮定 5 より散乱角 θ は十分小さいとして計算することができる. (48) 式において, 最終式の括弧内を θ^2 まで展開し, $\cos\alpha = (E_2-E_1)/v_{\mathrm{R}}v_{\mathrm{M}}$, $\cos\theta' = (E'_2-E'_1)/v_{\mathrm{R}}v_{\mathrm{M}}$ であることと, $v_{\mathrm{M}} = [2GM_{\mathrm{BH}}/r - (E_1+E_2) - (1/4)v_{\mathrm{R}}^2]^{1/2} := E_{\mathrm{M}}$ であることを用いると,

$$P \simeq 2v_{\mathrm{R}}E_{\mathrm{M}}^{1/2}\{v_{\mathrm{R}}^2E_{\mathrm{M}} - (E_2-E_1)(E'_2-E'_1)\}^{-1/2}(\theta^2-\theta_{\mathrm{m}}^2)^{-1/2}, \tag{52}$$

となる. ここで, $\theta_{\mathrm{m}}^2 = \{E'_2 - E'_1 - (E_2-E_1)\}^2/\{v_{\mathrm{R}}^2E_{\mathrm{M}} - (E_2-E_1)(E'_2-E'_1)\}$ と置いた.

以下, 微分散乱断面積について, θ が十分小さいとして,

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \simeq \frac{16G^2M_\star^2}{v_{\mathrm{R}}^4\theta^4}, \tag{53}$$

を用いる. このとき,

$$R(E,t) = 128\pi(GM_\star)^2\int \mathrm{d}E_1\mathrm{d}E_2\mathrm{d}E'_1\mathrm{d}E'_2\delta(E'_1+E'_2-E_1-E_2)Sf(E_1,t)f(E_2,t) \\ \times \int \mathrm{d}^3\mathrm{r}\int \mathrm{d}^2\Omega_{\mathrm{R}}\int \mathrm{d}v_{\mathrm{R}}\frac{1}{v_{\mathrm{R}}^2}I[v_{\mathrm{R}}^2E_{\mathrm{M}} - (E_2-E_1)(E'_2-E'_1)]^{-1/2}, \tag{54}$$

となる. ここで, I は Ω'_{R} の積分であり, θ が十分小さい極限では,

$$I := \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}^2\Omega'_{\mathrm{R}}\frac{(\theta^2-\theta_{\mathrm{m}}^2)^{-1/2}}{\theta^4} \simeq \frac{\pi}{4}\frac{1}{|\theta_{\mathrm{m}}|^3}, \tag{55}$$

となる. [7] したがって,

$$R(E,t) = 512\pi^4(GM_\star)^2\int \mathrm{d}E_1\mathrm{d}E_2\mathrm{d}E'_1\mathrm{d}E'_2\delta(E'_1+E'_2-E_1-E_2)Sf(E_1,t)f(E_2,t) \\ \times \int_0^{r_{\max}} \mathrm{d}rr^2\int \mathrm{d}v_{\mathrm{R}}\frac{1}{v_{\mathrm{R}}^2}|E'_1 - E_1 - (E'_2 - E_2)|^3[v_{\mathrm{R}}^2E_{\mathrm{M}} - (E_2-E_1)(E'_2-E'_1)], \tag{56}$$

[7] この部分の計算が理解できていない.

となる．ここで, $v_{\rm R}$ に関する積分は, 積分範囲が $\theta_{\rm m}^2 \geq 0$ という条件から決まるため,

$$\int_{v_{\rm Rmin}}^{v_{\rm Rmax}} {\rm d}v_{\rm R} \frac{1}{v_{\rm R}^2}[v_{\rm R}^2 E_{\rm M} - (E_2 - E_1)(E_2' - E_1')] = -\frac{1}{4}\int_{v_{\rm Rmin}}^{v_{\rm Rmax}} \frac{{\rm d}v_{\rm R}}{v_{\rm R}^2}(v_{\rm R}^2 - v_{\rm Rmin}^2)(v_{\rm R}^2 - v_{\rm Rmax}^2)$$
$$= \frac{1}{6}(v_{\rm Rmax} - v_{\rm Rmin})^3, \tag{57}$$

と計算できる．以上より,

$$R(E,t) = \frac{32\pi^4}{3} G^2 M_\star^2 \int {\rm d}E_1 {\rm d}E_2 {\rm d}E_1' {\rm d}E_2' \delta(E_1' + E_2' - E_1 - E_2) S f(E_1,t) f(E_2,t)$$
$$\times |\Delta|^{-3} \int_0^{r_{\rm max}} {\rm d}r r^2 (v_{\rm Rmax} - v_{\rm Rmin})^3, \tag{58}$$

が得られる．ここで, $\Delta = E_1' - E_1 \simeq E_2 - E_2'$ と置いた．2 番目の等式は, 仮定 5 から $E_2' - E_1' \simeq E_2 - E_1$ と書けることを用いている．

以下, 残りの積分を引き続き実行する．まず, r の積分は比較的簡単である．積分範囲の上限 $r_{\rm max}$ は $v_{\rm Rmin}$, $v_{\rm Rmax}$ を求める 2 次方程式の判別式が正となるべき, という条件から求まり, $r_{\rm max} = 2GM_{\rm BH}/(E_1 + E_2 + [(E_2' - E_1')(E_2 - E_1)]^{1/2})$ である．$(v_{\rm Rmax} - v_{\rm Rmin})^2$ は, 2 次方程式の解と係数の関係を用いれば簡単に計算することができ, $(v_{\rm Rmax} - v_{\rm Rmin})^2 = 8GM_{\rm BH}(1/r - 1/r_{\rm max})$ である．したがって,

$$\int_0^{r_{\rm max}} {\rm d}r r^2 (v_{\rm Rmax} - v_{\rm Rmin})^3 = (8GM_{\rm BH})^{3/2} \int_0^{r_{\rm max}} {\rm d}r r^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{\rm max}}\right)^{3/2}$$
$$= 4\pi (GM_{\rm BH})^3 \left[E_1 + E_2 + \{(E_2' - E_1')(E_2 - E_1)\}^{1/2}\right]^{-3/2}, \tag{59}$$

となる．ここで, r の積分に関して, $\int_0^{r_{\rm max}} {\rm d}r r^2 (1/r - 1/r_{\rm max})^{3/2} = (\pi/16) r_{\rm max}^{3/2}$ となることを用いた．$E_2' - E_1' \simeq E_2 - E_1$ の仮定を課すと,

$$\int_0^{r_{\rm max}} {\rm d}r r^2 (v_{\rm Rmax} - v_{\rm Rmin})^3 \simeq 4\pi (GM_{\rm BH})^3 \left[(E_1 + E_2) + \{(E_2 - E_1)^2\}^{1/2}\right]^{-3/2}$$
$$= \sqrt{2}\pi (GM_{\rm BH})^3 [\max(E_1, E_2)]^{-3/2}, \tag{60}$$

と求まる．次に, E_1', E_2' に関する積分だが, まずは S が始状態と終状態との入れ替えについて反対称であることから, $f(E_1,t)f(E_2,t) \to (1/2)[f(E_1,t)f(E_2,t) - f(E_1',t)f(E_2',t)]$ と置き換えても良いことがわかる．Δ が微小量であることから, f を Δ の冪級数として展開すると, $f(E_1,t)f(E_2,t) - f(E_1',t)f(E_2',t) \simeq [(\partial_{E_1} f(E_1,t)) f(E_2,t) - f(E_1,t)(\partial_{E_2} f(E_2,t))]\Delta$ となる．以上より,

$$R(E,t) = \frac{8\sqrt{2}\pi^5}{3} G^5 M_\star^2 M_{\rm BH}^3 \int {\rm d}E_1 {\rm d}E_2 [\max(E_1,E_2)]^{-3/2} [f(E_1,t)(\partial_{E_2} f(E_2,t)) - (\partial_{E_1} f(E_1,t)) f(E_2,t)]$$
$$\times \int_{-\infty}^{E_{\rm D}} {\rm d}\Delta \Delta |\Delta|^{-3} [{\rm sign}(E_1 + \Delta - E) - {\rm sign}(E_1 - E)], \tag{61}$$

となる．[8] Δ に関する積分は, sign 関数の扱いに注意すると, $E_1 - E \geq 0$ のときは, $-\infty < \Delta < -(E_1 - E)$ のときに括弧内が -2 となり, $E_1 - E < 0$ のときは, $-(E_1 - E) < \Delta < \infty$ のときに括弧内が $+2$ をとることがわかる．前者の場合は積分範囲において絶対値の中身が負になり, 後者の場合は正になることに注意すると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} {\rm d}\Delta \Delta |\Delta|^{-3} [{\rm sign}(E_1 + \Delta - E) - {\rm sign}(E_1 - E)] = 2|E_1 - E|^{-1}, \tag{62}$$

と求まる．E_1 についても,

$$\int_{\Delta_{\rm min}}^{E_{\rm max}} \frac{{\rm d}E_1}{|E_1 - E|} H(E_1) = 2H(E) \ln \Lambda, \tag{63}$$

を用いて積分を実行すると[9] $(\Lambda = E_{\rm max}/\Delta_{\rm min})$,

$$R(E,t) = \frac{8\sqrt{2}\pi^5}{3} G^5 M_\star^2 M_{\rm BH}^3 \ln\Lambda \int {\rm d}E_2 [\max(E,E_2)]^{-3/2} [f(E,t)(\partial_{E_2} f(E_2,t)) - (\partial_E f(E,t)) f(E_2,t)], \tag{64}$$

と求まる．

[8] S を具体的に表示するときの恐らく何らかの対称性を用いて E_2 を消しているが, 詳細は現段階で不明.
[9] この積分についても十分理解できていない.