


(高次元)一般相対論の未解決問題

京都大学大学院理学研究科
白水徹也



[目次]

1. 高次元一般相対論
2. 様々なblack hole 解
3. Black hole on (mem)brane



1. 高次元一般相對論

[動機]

- 超弦理論は高次元時空において定式化されている。
- 高次元時空におけるブラックホールは微視的な世界を記述する基本。また、超弦理論のよい試験場を提供。
- ある種の模型において、高次元ブラックホールが加速器で生成される可能性が出てきた。

[Einstein方程式]

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 8\pi T_{ab}$$

運動量エネルギーテンソル

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) V_c = R_{abc}{}^d V_d \\ R_{ab} = R^c{}_{acb} \quad R = R^a{}_a = g^{ab} R_{ab} \\ \nabla_a g_{bc} = 0 \end{array} \right.$$

∇_a : アフィン接続

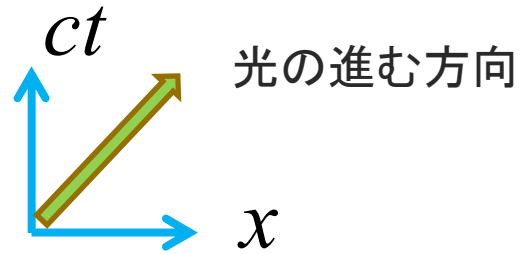
[ベクトルの種類]

$$\text{diag}(g_{ab}) = (-, +, +, \dots)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{ab} V^a V^b < 0 : \text{timelike} \\ g_{ab} V^a V^b > 0 : \text{spacelike} \\ g_{ab} V^a V^b = 0 : \text{null(light-like)} \end{array} \right.$$

[時空の発展]

t : 時間



$t = \text{constant}$

[Black hole]

・重力が強く、外向きに放たれた光の束ですら、その断面の面積が減少するような領域が存在する(捕獲領域)。また、捕獲領域の存在は特異点の存在を示す。

$$\dot{A} < 0$$

・十分外側では平坦な時空で近似できるため、面積は増大する。また光は遠方に到達する。

$$\dot{A} > 0$$

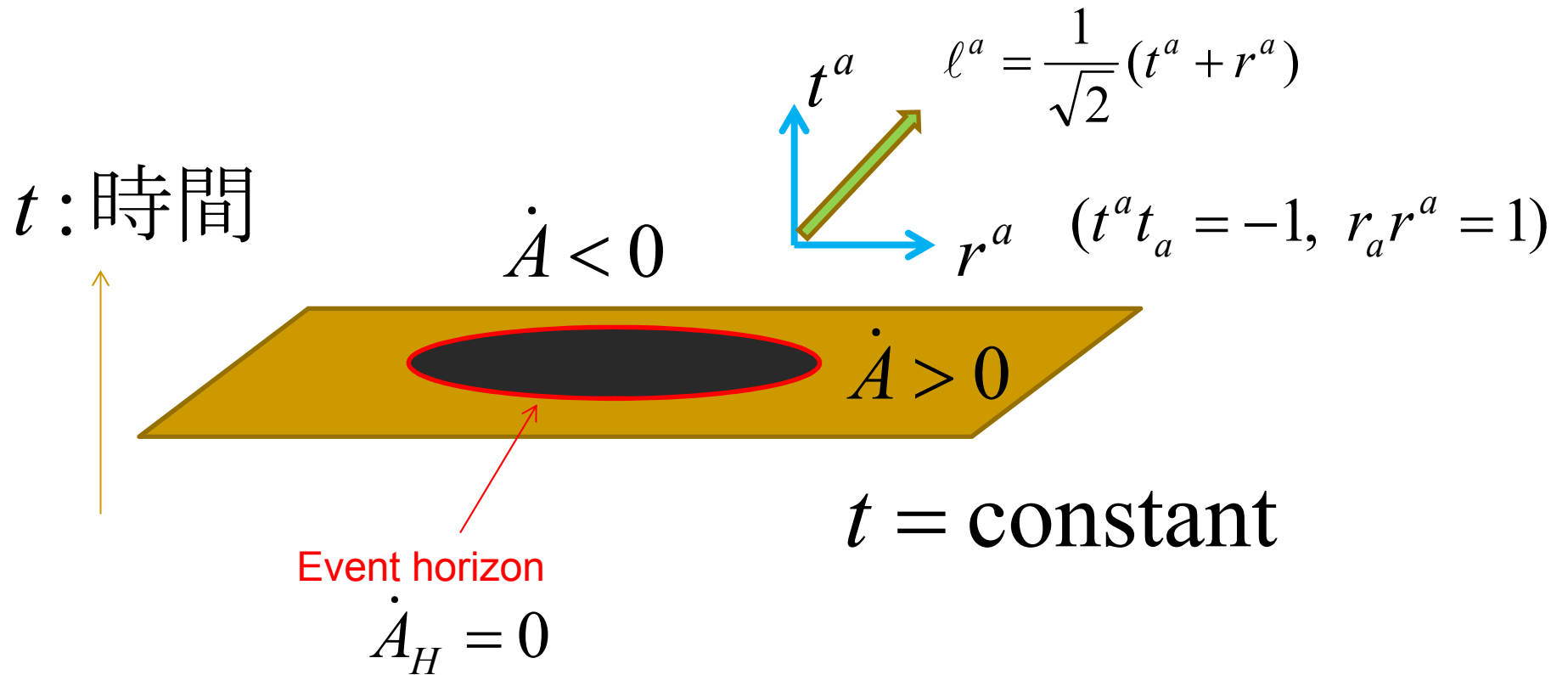
・放たれた光が遠方に到達できない領域がblack hole。その境界がevent horizon。また、面積増大則(Hawking)より、

$$\dot{A}_H \geq 0$$

・時空が定常(timelike Killing vectorが存在)な場合、event horizonの面積は一定

$$\dot{A}_H = 0$$

[定常Black holeの断面]



[定常black holeの”位置”]

断面上の誘導計量: $h_{ab} = g_{ab} + t_a t_b - r_a r_b = q_{ab} - r_a r_b$

$$\begin{aligned}\theta &:= h^{ab} \nabla_a \ell_b = \frac{\dot{A}}{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[h^{ab} \nabla_a r_b + (q^{ab} - r^a r^b) \nabla_a t_b \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[k + K - K_{ab} r^a r^b \right]\end{aligned}$$

$$k_{ab} = h_a^c h_b^d \nabla_c r_d, \quad K_{ab} = q_a^c q_b^d \nabla_c t_d$$



$$\theta_H = \frac{\dot{A}_H}{A_H} 0 \Rightarrow (k + K - K_{ab} r^a r^b) |_H = 0$$

【ある外的曲率ゼロの時間一定面上】

$$K_{ab} = q_a^c q_b^d \nabla_c t_d = 0$$

$$\theta_H = \frac{\dot{A}_H}{A_H} = 0 \Rightarrow k_H = h^{ab} \nabla_a r_b |_H = 0$$

Event horizon \Rightarrow minimal surface

[静的black hole時空]

静的時空: Killing vector $\xi = \partial t$ を持つ定常な時空で、 $t = \text{一定面}$ が積分多様体

$$t = \text{一定面上で} \quad K_{ab} = q_a^c q_b^d \nabla_c t_d = 0$$

$$\theta_H = \frac{\dot{A}_H}{A_H} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k_H = h^{ab} \nabla_a r_b |_H = 0$$

Event horizon \Leftrightarrow minimal surface




minimal surface研究 \sim black hole研究

[定常Black holeのtopology]

n次元時空

event horizonの $(n-2)$ 次元断面のRicci scalar curvature

$$\int_S^{(n-2)} R dS > 0$$

$n = 4$  $\int dS^{(2)} R = 8\pi(1-g)$ (Gauss - Bonnet, g : ジーナス#)

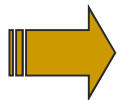
 $g = 0$

 定常なblack holeのtopologyは S^2

[4次元時空：唯一性定理]

■ 唯一性定理

- ・静的とすると真空解はSchwarzshild解に限られる。
- ・定常の場合、真空解はKerr解に限られる。



無限遠方の観測者が測定する保存質量 M , 角運動量 J を指定すれば、ブラックホール時空が唯一に決まる

[Black holeの形:n次元時空]

$$\int_S^{(n-2)} R dS > 0$$

- topologyへの制限が弱い。
- 様々なblack object解。Black ring解など。

[剛性]

- 静的black holeは球対称。

Schwarzschild-Tangherlini 解で唯一。

Hwang(1998), Gibbons, 井田, 白水(2002)

- 定常black holeは軸対称性。

(少なくとも1つ軸対称Killing vectorが存在)

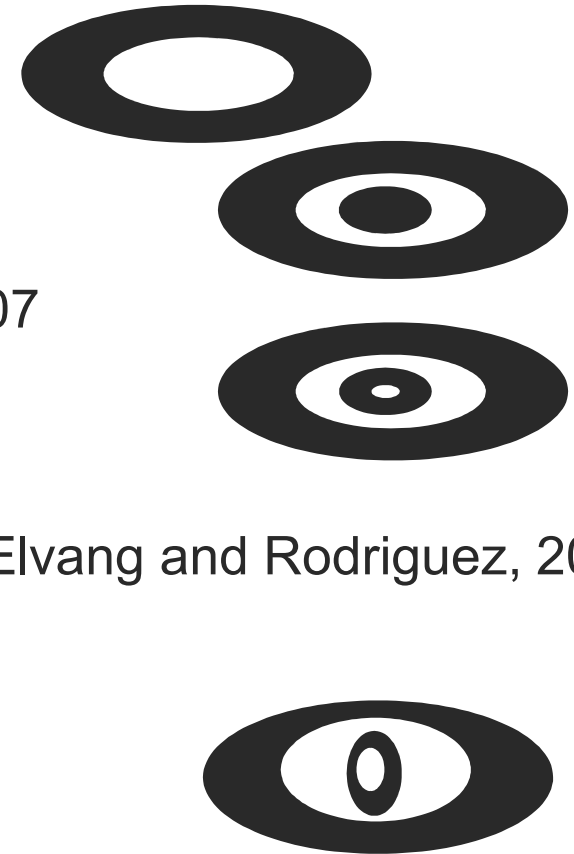
Hollands, 石橋, Wald(2007)

- $n=5$ 次元では2つの軸対称性を持つ厳密解のみが発見。
- $n \geq 6$ の厳密解は $n-2$ 次元球面のもの(Myers&Perry, 1986)を除いて未発見。

[様々な5次元定常black object解]

- Black ring Emparan and Reall 2002
- Black Saturn Elvang and Figueras, 2007
- Di-ring Iguchi and Mishima, 2007
- Bicycling black ring Izumi, 2008, Elvang and Rodriguez, 2008

などなど



課題

- $n \geq 6$ 次元解の構成
- 高次元black objectの分類(⇒田辺氏の講演)
- 数値解の構成
- 安定性解析
- 超弦理論的ヘアーの有無(⇒大橋氏講演)

などなど

数学問題

定常(静的)時空で解の具体的な構成をせずにblack objectの存在を証明できるか？

境界がevent horizon(minimal surface)と遠方からなる正則な時間一定面が存在するか？

[復習: ヒント?]

4次元時空の場合、例えば静的なblack hole時空については、問題が平坦空間上の調和関数の境界値問題に帰着。

[コンパクトな次元をもつ場合]

$$M_{n-1} \times S^1$$

■ Black string解

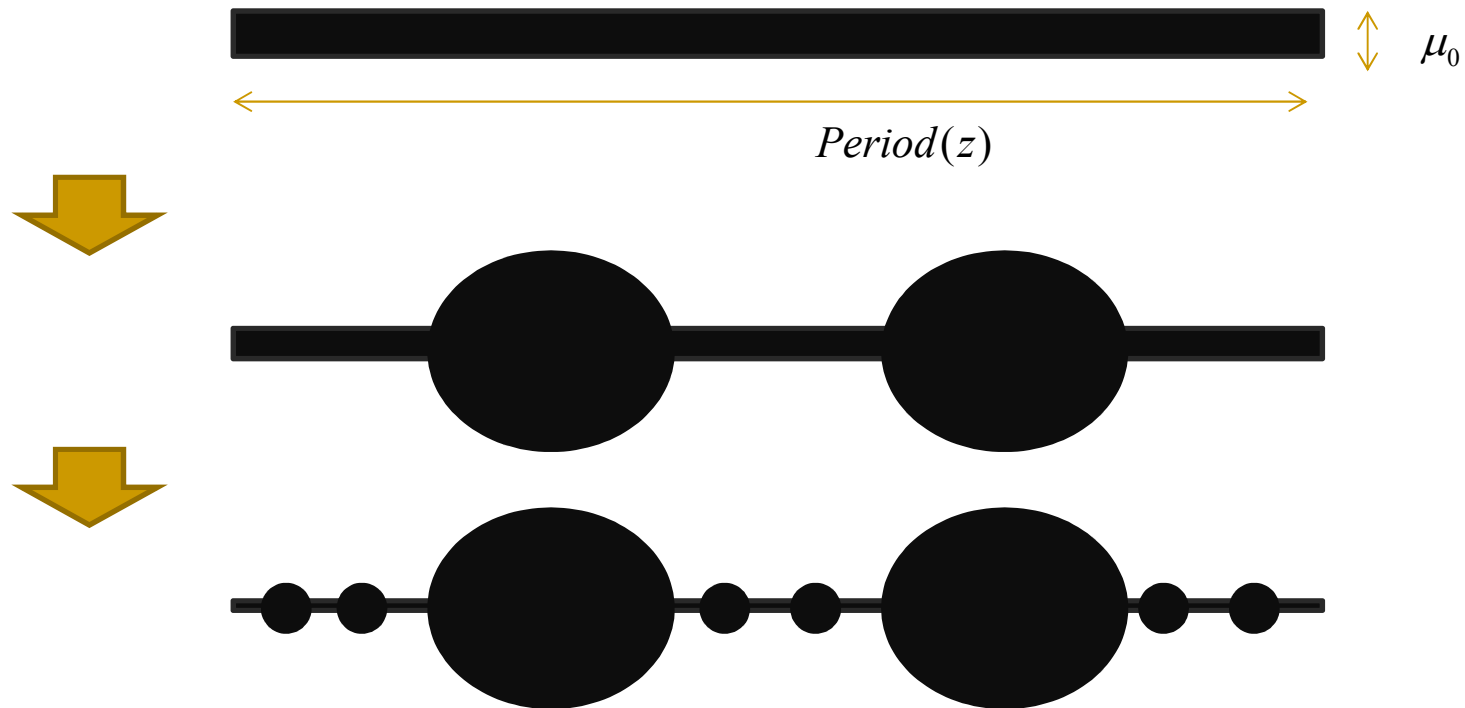
$$\text{Schwarzshild}_{n-1} \times S^1$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\mu_0^{n-4}}{r^{n-4}}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{\mu_0^{n-4}}{r^{n-4}}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d^2\Omega_{n-3} + dz^2$$

Period(z) > $\mu_0 \Rightarrow$ Gregory-Lafamme不安定 \Rightarrow 最終状態は？

Numerical simulation

- Lehner-Pretoius 2010



相似的に進化してゆく。ただし、遠方の観測者からは有限で時間発展は特異点発生でもって止まる傾向あり。

[Black stringのfinal fate?]

有限のaffine time(horizon上)で、horizonの断面の面積がゼロになることはない(Horowitz&Maeda, 2001)。

Simulationの結果と矛盾なし。

その重要性にもかかわらず、Black stringの最終状態に対する解析的研究は皆無。。。

Gravitational Collapse in anti-deSitter

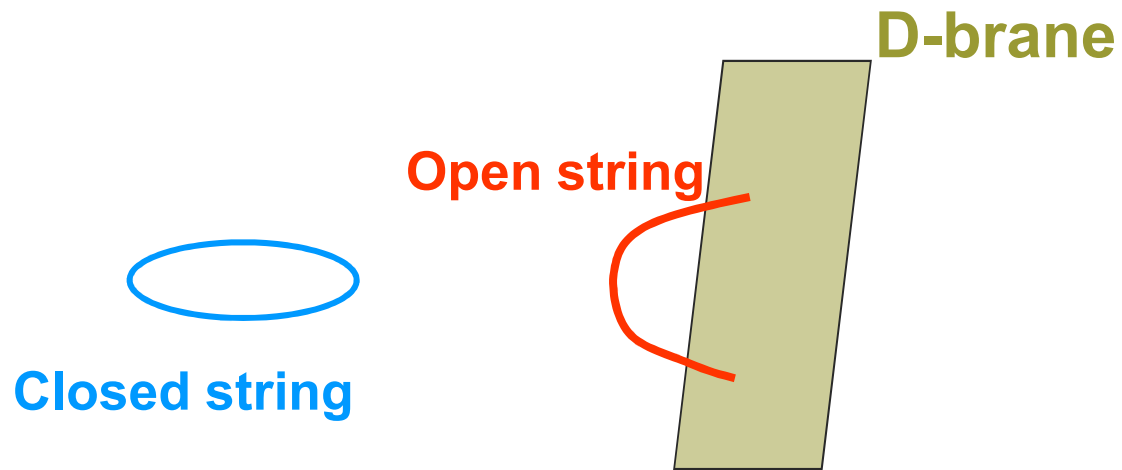
Anti-deSitter時空におけるblack holeの不安定性
⇒ 最終状態？ 新しい解？ 特異点定理

(石橋氏の講演？)



3. Black hole on (mem)brane

超弦理論からの示唆



Open string ~物質

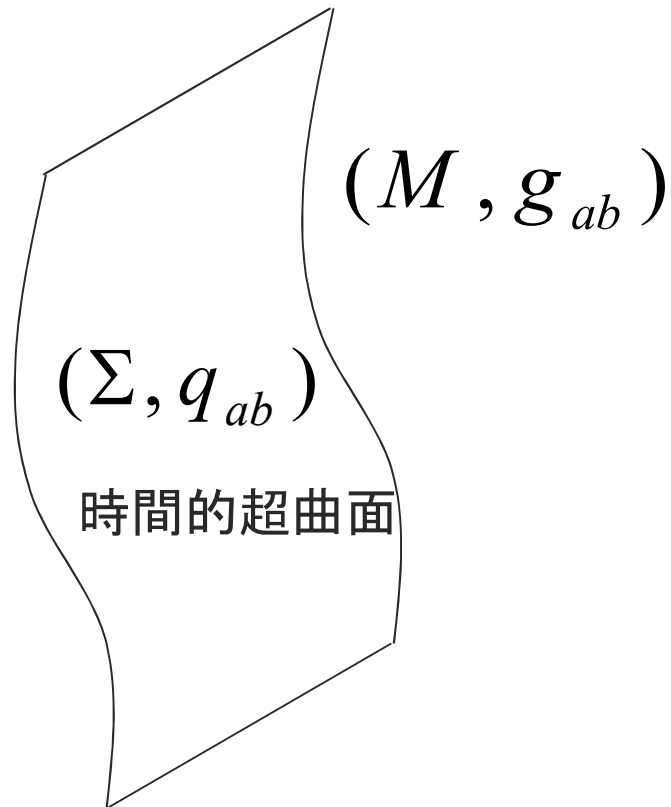
Closed string ~重力

[Braneworld]

4次元時空 = 高次元時空中を運動するmembrane



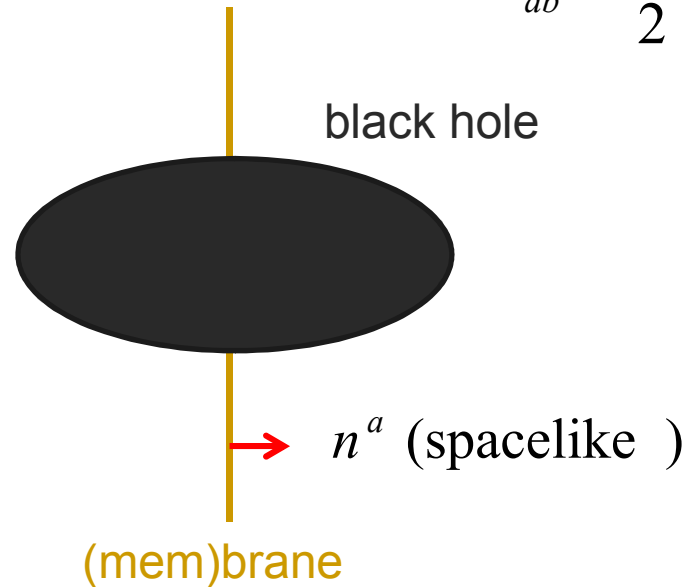
5次元時空M中の4次元brane時空 Σ



(Static) black hole on brane

5次元Einstein方程式

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = -\Lambda g_{ab} = \frac{6}{\ell^2} g_{ab}$$



$$q_{ab} = g_{ab} - n_a n_b$$

$$K_{ab} |_{brane} = q_a^c q_b^d \nabla_c n_d |_{brane} = -\frac{1}{\ell} q_{ab} \quad (\text{境界条件})$$

厳密解の未発見

- 小さなblack hole ~ 近似的に5次元Schwarzschild時空
⇒ 数値解の構成
- 大きなblack hole
⇒ 余剰次元に激しく引っ張られる。
⇒ 静的(あるいは定常)なblack hole解は存在しない?
(田中予想, 2002)
⇔ 最近、数値解が発見された(Figueras&Wiseman, 2011)!

解の存在を数学的に示したい!