スピンの確率密度関数について

久徳 浩太郎

2020 年 7 月 10 日

コンパクト連星の軌道運動においては、その軌道角運動量に平行な方向のスピン強度 $\chi_\parallel$ と垂直な方向のスピン強度 $\chi_\perp$ とが独立な影響を及ぼすことが多く、重力波検出でもそれぞれ $\chi_{\rm eff}, \chi_p$ と呼ばれる量を通じて別個に推定される。そのため、$\chi_\parallel, \chi_\perp$ の事前確率密度関数 $P_\parallel, P_\perp$ を考えたい[*1]。連星の一方が圧倒的に重い、あるいは一方が無回転の場合は連星の運動を影響するのが一方のスピンのみであるため、これらは $\chi_{\rm eff}, \chi_p$ の事前確率密度関数と直接的に対応する。

事前確率として何もモデルを仮定しない場合、パラメータ推定において余計な情報を持ち込まないためには無次元スピンの大きさ χ が 0 から 1 で一様、天頂角 θ については $\mu = \cos\theta$ が -1 から $+1$ で一様だと想定するのが自然であろう。するとそれぞれの事前確率密度関数およびその同時確率密度関数は

$$P_\chi(\chi) = 1 \tag{1}$$

$$P_\mu(\mu) = \frac{1}{2} \tag{2}$$

$$P_{\chi,\mu}(\chi,\mu) := P_\chi(\chi) P_\mu(\mu) \tag{3}$$

$$= \frac{1}{2} \tag{4}$$

で与えられる。方位角 φ の事前確率密度関数 $P_\varphi(\varphi) = 1/(2\pi)$ は全体を一様に変えるだけなので、ここでは無視する。

これらの変数を用いて $\chi_\parallel, \chi_\perp$ は

$$\chi_\parallel = \chi\mu, \tag{5}$$

$$\chi_\perp = \chi\sqrt{1-\mu^2} \tag{6}$$

と書ける。この Jacobian

$$J = -\frac{\chi_\perp}{\chi_\parallel^2 + \chi_\perp^2} \tag{7}$$

を用いると、新しい変数の組 $(\chi_\parallel, \chi_\perp)$ の同時事前確率密度関数は

$$P_{\parallel,\perp}(\chi_\parallel, \chi_\perp) = |J| P_{\chi,\mu}(\chi,\mu) \tag{8}$$

$$= \frac{\chi_\perp}{2(\chi_\parallel^2 + \chi_\perp^2)} = \frac{\sin\theta}{2\chi} \tag{9}$$

と得られ、図 1 のようになる。一様な (χ, θ) の同時事前確率密度関数とは違い、$(\chi_\parallel, \chi_\perp)$ は両方が χ に比例するために χ が小さい領域が得をする効果と、$\chi_\perp \propto \sin\theta$ なので立体角で得をする効果とが見えている。と

[*1] このへんの分野では異なる変数の確率密度関数を引数だけで区別することが多い気がするが、不便だと思うので P の添字で区別する。今の場合、引数には深い意味はない。

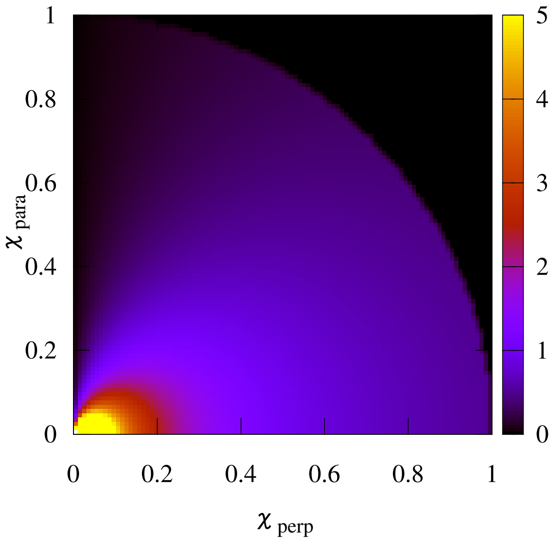

図 1　同時事前確率密度関数 $P_{\parallel,\perp}(\chi_\parallel, \chi_\perp)$。北半球のみを描いた。

りわけ大きな確率密度を持つ領域を考えると

$$\frac{\partial P_{\parallel,\perp}}{\partial \chi_\perp} = \frac{\chi_\parallel^2 - \chi_\perp^2}{2(\chi_\parallel^2 + \chi_\perp^2)^2} \tag{10}$$

なので、それぞれの $\chi_\parallel$ について事前確率密度関数が最大になるのは $\chi_\perp = |\chi_\parallel|$ のときである。よって、もし $\chi_\perp$ に上限 $\chi_{\perp,\mathrm{lim}}$ がつけば、$\chi_\perp$ で周辺化したときに $|\chi_\parallel| > \chi_{\perp,\mathrm{lim}}$ は大きく抑制されると予想できる。

以下、実際に周辺化して $\chi_\parallel$ の事前確率密度関数を求め、$\chi_\perp$ に関する情報の影響を定量的に確認する。まず周辺化は

$$P_\parallel(\chi_\parallel) \propto \int_{\chi_{\perp,\mathrm{min}}}^{\chi_{\perp,\mathrm{max}}} P_{\parallel,\perp}(\chi_\parallel, \chi_\perp) d\chi_\perp \tag{11}$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\chi_\parallel^2 + \chi_{\perp,\mathrm{max}}^2}{\chi_\parallel^2 + \chi_{\perp,\mathrm{min}}^2} \right) \tag{12}$$

と行われる。以降、最小値 $\chi_{\perp,\mathrm{min}}$ は 0 とする。最大値 $\chi_{\perp,\mathrm{max}}$ に関する情報がない場合は $\chi \leq 1$ のみを考慮して $\chi_{\perp,\mathrm{max}} = \sqrt{1 - \chi_\parallel^2}$ となり[*2]、この場合は規格化を改めて考える必要もなく、いわゆる zprior [1]

$$P_{\parallel,\mathrm{w/o}}(\chi_\parallel) = -\frac{1}{2} \ln |\chi_\parallel| \tag{13}$$

[*2] 採用する波形モデルの限界で値を決める場合もある

が得られる。一方で何らかの上限値 $\chi_{\perp,\mathrm{lim}}$ が与えられている場合[*3]、上記の積分の上限は

$$\chi_{\perp,\mathrm{max}} = \begin{cases} \chi_{\perp,\mathrm{lim}} & \left(|\chi_\parallel| \le \sqrt{1-\chi_{\perp,\mathrm{lim}}^2}\right) \\ \sqrt{1-\chi_\parallel^2} & \left(\sqrt{1-\chi_{\perp,\mathrm{lim}}^2} < |\chi_\parallel| \le 1\right) \end{cases} \tag{14}$$

と分類される。規格化に

$$\int \ln\left(1+\frac{A^2}{x^2}\right)dx = x\ln\left(1+\frac{A^2}{x^2}\right) + 2A\arctan\left(\frac{x}{A}\right) \tag{15}$$

を考慮して

$$P_{\parallel,\mathrm{w}}(\chi_\parallel;\chi_{\perp,\mathrm{lim}}) = \frac{1}{C}\times\begin{cases} (1/4)\ln(1+\chi_{\perp,\mathrm{lim}}^2/\chi_\parallel^2) & \left(|\chi_\parallel| \le \sqrt{1-\chi_{\perp,\mathrm{lim}}^2}\right) \\ -(1/2)\ln|\chi_\parallel| & \left(\sqrt{1-\chi_{\perp,\mathrm{lim}}^2} < |\chi_\parallel| \le 1\right) \end{cases} \tag{16}$$

$$C = 1-\sqrt{1-\chi_{\perp,\mathrm{lim}}^2} + \chi_{\perp,\mathrm{lim}}\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\chi_{\perp,\mathrm{lim}}^2}}{\chi_{\perp,\mathrm{lim}}}\right) \tag{17}$$

が得られる。この関数は $|\chi_\parallel| \ll \chi_{\perp,\mathrm{lim}}$ では情報がないときの $-\ln|\chi_\parallel|$ と同様に振る舞い、$\chi_\parallel \gg \chi_{\perp,\mathrm{lim}}$ では 0 に近づく。

参考文献

[1] J. Lange, R. O'Shaughnessy, M. Rizzo, arXiv:1805.10457

[*3] max と書くと混乱するので lim にした