潮汐変形率・連星潮汐変形率

久徳 浩太郎

2020 年 5 月 7 日

外場がかかったときの星の歪みやすさを表す潮汐変形率 (tidal deformability) Λ と、連星合体からの重力波観測において 2 つの星の潮汐変形率の組み合わせとして最もよく測られる連星潮汐変形率 (binary tidal deformability) $\tilde{\Lambda}$ とを導出する。

仮定

連星をモデル化するにあたり、2 つの星（あるいはそれを構成する物質）は空間的に離れた 2 つの有限領域内にそれぞれ存在しており*1、Newton 重力に従って運動する順圧 (barotropic) の完全流体で構成されているとする。すなわち、質量密度 ρ（以下、密度と略）が与えられたときに重力ポテンシャル Φ は Poisson 方程式

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \tag{1}$$

に従い、境界条件 $\Phi(r \to \infty) = 0$ を課したときは Green 関数による積分形を用いて

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G\int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3x' \tag{2}$$

で与えられる。流体は速度 v^i、圧力 P を用いて連続の式

$$\partial_t\rho + \nabla_i(\rho v^i) = 0 \tag{3}$$

および Euler 方程式

$$\partial_t(\rho v^i) + \nabla_j(\rho v^i v^j) = -\nabla^i P - \rho\nabla^i\Phi \tag{4}$$

あるいはその非保存形

$$\rho\frac{dv^i}{dt} = -\nabla^i P - \rho\nabla^i\Phi \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt} := \partial_t + v^i\nabla_i \tag{6}$$

に従って運動する。順圧流体を考えているので、圧力 P は状態方程式により密度 ρ の関数 $P(\rho)$ として与えられる。なお、i, j など小文字の添字は (x, y, z) や (r, θ, φ) などの空間座標を表し、演算子 ∇_i は平坦計量 f_{ij} での共変微分であって直交座標では偏微分になる。球面調和関数のモードにも l, m などの小文字を用いるが、混乱は生じないものと期待する。2 節で使う記法として、l 個の添字の組を大文字で $L := i_1 i_2 \dots i_l$ などと表し、さらにこの対称トレースレス部分を取る操作を $\langle L\rangle$ のように $\langle\rangle$ で表すと約束する。例として

$$T_{\langle ij\rangle} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) - \frac{1}{3}f_{ij}f^{kl}T_{kl} \tag{7}$$

*1 平たく言えば 2 つの星が離れているということ

など。同様に k 個の添字の組を K で表す。

モデルあるいは仮定の妥当性について議論しておく。一般相対論効果を無視したのは簡単のためで、中性子星のようなコンパクト天体の定量的な理解には一般相対論が必須である。相対論効果を考慮する場合、流体の方程式は適宜変更を受ける。特に一般相対論では質量や多重極モーメントなどの大局量を密度の積分として定義することが難しくなり、議論の方針に大きな修正が必要となる。現実的な中性子星を考える限り、重力波の議論において軌道運動をしている段階では粘性や磁場は無視してよく、完全流体の仮定は問題ない。また、中性子星を構成する流体は常にほぼゼロ温度とみなせるため、順圧の仮定も妥当である。星の自転も一部の例外を除いて重要でない。これらの仮定は中性子星の誕生直後および連星の合体後には必ずしも妥当でないことを注意しておく。

1　潮汐変形率 Λ

潮汐変形率は、静的球対称な星に外場として（別の星などが作る）静的な重力場を摂動的に印加したとき、外場の非一様部分＝潮汐場に比例した多重極モーメントが誘起されるにあたって、その大きさを決める比例係数として定義される。この量は考えている星の質量や状態方程式といった性質で決まり、逆に潮汐変形率と質量との関係を観測的に求めれば状態方程式を得ることができる。この 1 節では単独の星に着目し、まず静的球対称な構造を求める。次にそこに摂動を加えた際に誘起される多重極モーメントを求め、その大きさが星固有の性質にどう依存するかを見ることにより潮汐変形率がどう定義されるかを見る。この問題には、星の中心を原点とした球座標 (r, θ, φ) が適している。なお、軌道運動をする連星にも関わらず外場が静的であるという仮定は、外場によって変形した星の形状が落ち着くまでの時間（星の力学的時間）が、軌道運動によって外場そのものが変化する時間（軌道周期）よりも十分短い状況で成り立つ近似であり、合体直前の短い時期を除けば妥当である。

本節の議論は主に [1] の App. A および [2] の 2 章を参考にしている。他に [3] の 2 章にも Euler 摂動に基づく（後述）同様の議論があり、一般論を整備する手間をかければそちらの方が見通しがいいかもしれない。

1.1　背景

まずは背景となる静的球対称の星の構造を求める。ここで静的というのは全ての変数が時間 t に依存せず、さらに流体が静止していて速度場 v^i も消える、という意味である。すると球対称の下では全ての物理量が動径座標 r のみの関数となる。静的な場合には連続の式は自明となる。代わりに、半径 r 以内にある物質の質量 $m(r)$ の分布が定義により

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi\rho r^2 \tag{8}$$

$$m(0) = 0 \tag{9}$$

で与えられることは有用である。Euler 方程式の r 成分は静水圧平衡条件

$$\frac{dP}{dr} + \rho\frac{d\Phi}{dr} = 0 \tag{10}$$

を与える。ここに表れる重力ポテンシャルの勾配は、球対称での Poisson 方程式

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = 4\pi G\rho \tag{11}$$

を積分し、原点で勾配すなわち重力が消えることを要請して積分定数を決めることで

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{Gm}{r^2} \tag{12}$$

と書ける[*2]。これらを組み合わせると、静水圧平衡条件は

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\rho m}{r^2} \tag{13}$$

となる。この式の初期条件となる星の中心での圧力 $P(0) = P_c$ は自由に与えられるパラメータである。

言い換えれば、状態方程式が与えられたとき、中心圧力 $P(0) = P_c$ あるいはそれと等価な中心密度 $\rho(0) = \rho_c$ を決め、(8) と (13) とを連立させ、圧力がゼロになる動径座標 $r = R$ まで解くことで、星の構造や大局量が定まる。星の表面はこの $P(R) = 0$ という条件で定義され、表面を与える座標 R は半径を定義する。また、星全体の質量も $M = m(R)$ と求まる。以降でも背景の星の半径および質量を R および M と表す。得られる $\rho(r)$ および $m(r)$ は摂動計算で必要になる。

1.2 摂動

次に、1.1 節で得た背景の星が、摂動的かつ静的な外場により（これは連星の場合には伴星による重力場を想定している)、静的だが非球対称な別の形状に移った状況を考える[*3]。摂動解を考えるにあたり、背景解としては中心密度が同じ静的球対称星を対応させる。一般には様々なやり方で背景解と摂動解とを対応させることができ、例えば無限遠から徐々に外場の重力源を近づけていく場合なども考えることができる。物理的にはむしろこの方が自然で、その場合は星の質量が同じという条件で背景解と摂動解との対応が決まる。中心密度を固定する場合、後で見るように球面調和関数展開で $l = 0$ モードの摂動が質量を変化させるモードとなる。そこで、ここでは $l = 0$ モードの摂動を予め禁止することにより、摂動の前後で星の質量が変わらないことも課し、物理的に自然な状況を同時に実現する。

一般に、流体の摂動は Euler 描像で考えることもできるが、星のような表面を持った流体を考えると密度や圧力がゼロになる表面付近で流体量の変動が容易に $O(1)$ 以上になり、摂動の妥当性が怪しくなる。そのため、ここでは Lagrange 描像での摂動、とりわけ元が静的で球対称な星の変形を考えるので、等密度面の変位に注目して動径方向にのみ Lagrange 座標を導入し、角度方向は球面調和関数展開で扱う。

具体的に、摂動の前後で同じ (θ, φ) 方向かつ同じ密度の点を指す Lagrange 座標 a を、背景で $a = r$ として導入する[*4]。特に原点 $r = 0$ は $a = 0$ であって仮定した背景解との対応により摂動の前後で密度は変わらず、密度がゼロとなる表面 $r = R$ は引き続き $a = R$ に対応する。この Lagrange 座標 a が一定の面は定義により等密度面であるが、摂動が加わるとその動径座標 r が角度に依存して変化する。そこで、引き起こされる等密度面の変形を球面調和関数展開により

$$r(a, \theta, \varphi) = a\left[1 + \sum_{l,m} f_{lm}(a) Y_{lm}(\mathbf{n})\right] \tag{14}$$

と表す。ただし $\mathbf{n}$ は (θ, φ) を表す。ここでの興味ある量は変形のモードごとの動径分布 $f_{lm}(a)$ で、これが $|f_{lm}| \ll 1$ にとどまることが変形が摂動的である条件となり、扱うことのできる外場の強さに制限を与える。

[*2] 重力ポテンシャル自体の直接計算は 1.2 節を参照のこと

[*3] 日常的な例としては、地球が月の潮汐力で楕円体に歪む場合

[*4] 密度一定の場合はこの議論は修正を要する

この式から、積分において体積要素の変換に用いる

$$\frac{\partial r}{\partial a} = 1 + \sum_{l,m} \left[f_{lm}(a) + a\frac{df_{lm}}{da} \right] Y_{lm}(\mathbf{n}) \tag{15}$$

に加え、摂動の 1 次で成り立つ式

$$r^n \approx a^n \left[1 + n\sum_{l,m} f_{lm}(a) Y_{lm}(\mathbf{n}) \right] \tag{16}$$

および

$$a(r,\theta,\varphi) \approx r \left[1 - \sum_{l,m} f_{lm}(r) Y_{lm}(\mathbf{n}) \right] \tag{17}$$

も得られる。以降、この 1.2 節での $\approx$ は「変形 f_{lm} の 1 次で」の意味である。

静水圧平衡にある順圧流体では、等密度面を求めることは等ポテンシャル面を求めることと等価である。というのは、変形後も静水圧平衡 $\nabla_i P + \rho\nabla_i\Phi = 0$ が成り立つ場合、順圧の下では等密度面は等圧力面でもあって $\nabla_i P \parallel \nabla_i\rho$ となるため、静水圧平衡条件と $\nabla_i\rho$ との外積を取れば

$$\epsilon^{ijk}(\nabla_j\rho)(\nabla_k\Phi) = 0 \tag{18}$$

となる[*5]。よって、等密度面は等ポテンシャル面とも一致する。

そこで星内部および近傍の真空領域での重力ポテンシャルに注目し、星自身が作る自己場 (internal) と外場 (external) とに分けて考える。外場を作る物質場は考えている星から離れた場所にあるとしているので、星内部および近傍真空領域での外場の重力ポテンシャルは Laplace 方程式を満たす正則な真空解である。よって、重力ポテンシャルは

$$\Phi = \Phi_{\rm int} + \Phi_{\rm ext} \tag{19}$$

$$\nabla^2\Phi_{\rm int} = 4\pi G\rho \tag{20}$$

$$\nabla^2\Phi_{\rm ext} = 0 \tag{21}$$

と分けることができる。外場の重力源を含まない領域だけで考える場合（実際にそうする)、$\Phi_{\rm ext}$ は遠方で減衰する量ではないことには注意を要する。

1.2.1 星の内部

まずこの 1.2.1 節では、$\mathbf{x} = (r,\theta,\varphi)$ を星の内部の点として、星内部での重力ポテンシャル $\Phi(\mathbf{x})$ を考える。そこから、等密度面と一致することがわかった等ポテンシャル面が満たす条件を導き、与えられた外場によるモードごとの変形の分布 $f_{lm}(a)$ を求める。

変形した星の密度分布が位置 $\mathbf{x}$ に作る自己重力ポテンシャル $\Phi_{\rm int}(r,\theta,\varphi)$ は、Legendre 多項式あるいはその加法定理を用いた球面調和関数による展開

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \frac{1}{r_>}\sum_l \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l P_l(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}') \tag{22}$$

$$= \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}(\mathbf{n}) Y_{lm}^*(\mathbf{n}') \tag{23}$$

[*5] ベクトル解析の記法では $\boldsymbol{\nabla} P \parallel \boldsymbol{\nabla}\rho$ および $\boldsymbol{\nabla}\rho \times \boldsymbol{\nabla}\Phi = 0$

により、Green 関数を用いて計算できる。ここで r, r' の小さい方、大きい方をそれぞれ $r_<, r_>$ とした。これに合わせて、動径座標 $r' < r$ からの寄与 $\Phi_{\mathrm{int},<}$ と $r' > r$ からの寄与 $\Phi_{\mathrm{int},>}$ とに分けて計算する。

内側からの寄与は

$$\Phi_{\mathrm{int},<}(\mathbf{x}) = -\sum_{l,m} \frac{4\pi G}{2l+1} \int_{\mathbf{n}'} \int_0^r \rho(\mathbf{x}') \frac{(r')^l}{r^{l+1}} Y^*_{lm}(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n}) (r')^2 dr' d\mathbf{n}' \tag{24}$$

$$= -\sum_{l,m} \frac{4\pi G}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\mathbf{n})}{r^{l+1}} \int_{\mathbf{n}'} \int_0^r \rho(\mathbf{x}') (r')^{l+2} Y^*_{lm}(\mathbf{n}') dr' d\mathbf{n}' \tag{25}$$

で与えられる。この r' および dr' を a で書き換えることにより

$$\Phi_{\mathrm{int},<}(\mathbf{x}) \approx -\sum_{l,m} \frac{4\pi G}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\mathbf{n})}{r^{l+1}} \int_{\mathbf{n}'} \int_0^a \rho(a') \left[a'^{l+2} + \sum_{k,n} \frac{d}{da'} \left(a'^{l+3} f_{kn} \right) Y_{kn}(\mathbf{n}') \right] Y^*_{lm}(\mathbf{n}') da' d\mathbf{n}' \tag{26}$$

$$\begin{aligned} &\approx -\sum_{l,m} \frac{4\pi G}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\mathbf{n})}{r^{l+1}} \int_{\mathbf{n}'} \int_0^r \rho(a') \left[a'^{l+2} + \sum_{k,n} \frac{d}{da'} \left(a'^{l+3} f_{kn} \right) Y_{kn}(\mathbf{n}') \right] Y^*_{lm}(\mathbf{n}') da' d\mathbf{n}' \\ &+ \sum_{l,m} \frac{4\pi G}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\mathbf{n})}{r^{l+1}} \int_{\mathbf{n}'} \rho(r) r^{l+3} Y^*_{lm}(\mathbf{n}') \sum_{k,n} f_{kn}(r) Y_{kn}(\mathbf{n}') d\mathbf{n}' \end{aligned} \tag{27}$$

が得られる。ここで、第二式の a' 積分の上限 a が $r = r(a, \theta', \varphi')$ を通して陰に角度依存性を持ったため、それを分離して摂動の高次項を無視することで第三式を得た。第三式二行目の角度積分を実行することで

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathrm{int},<}(\mathbf{x}) &\approx -\sum_{l,m} \frac{4\pi G}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\mathbf{n})}{r^{l+1}} \int_{\mathbf{n}'} \int_0^r \rho(a') \left[a'^{l+2} + \sum_{k,n} \frac{d}{da'} \left(a'^{l+3} f_{kn} \right) Y_{kn}(\mathbf{n}') \right] Y^*_{lm}(\mathbf{n}') da' d\mathbf{n}' \\ &+ \sum_{l,m} \frac{4\pi G}{2l+1} \rho(r) r^2 f_{lm}(r) Y_{lm}(\mathbf{n}) \end{aligned} \tag{28}$$

を得る。

外側からの寄与も同様にして

$$\Phi_{\mathrm{int},>}(\mathbf{x}) = -\sum_{l,m} \frac{4\pi G}{2l+1} r^l Y_{lm}(\mathbf{n}) \int_{\mathbf{n}'} \int_r^\infty \rho(\mathbf{x}') r'^{1-l} Y^*_{lm}(\mathbf{n}') dr' d\mathbf{n}' \tag{29}$$

$$\approx -\sum_{l,m} \frac{4\pi G}{2l+1} r^l Y_{lm}(\mathbf{n}) \int_{\mathbf{n}'} \int_a^R \rho(a') \left[a'^{1-l} + \sum_{k,n} \frac{d}{da'} \left(a'^{2-l} f_{kn} \right) Y_{kn}(\mathbf{n}') \right] Y^*_{lm}(\mathbf{n}') da' d\mathbf{n}' \tag{30}$$

$$\begin{aligned} &\approx -\sum_{l,m} \frac{4\pi G}{2l+1} r^l Y_{lm}(\mathbf{n}) \int_{\mathbf{n}'} \int_r^R \rho(a') \left[a'^{1-l} + \sum_{k,n} \frac{d}{da'} \left(a'^{2-l} f_{kn} \right) Y_{kn}(\mathbf{n}') \right] Y^*_{lm}(\mathbf{n}') da' d\mathbf{n}' \\ &- \sum_{l,m} \frac{4\pi G}{2l+1} \rho(r) r^2 f_{lm}(r) Y_{lm}(\mathbf{n}) \end{aligned} \tag{31}$$

と得られる。やはり変数変換後の積分範囲の内側の端点 a が角度依存性を持つため、これを分離して積分した。なお、A は角度に依存せず R に等しい。

これら内側、外側両方からの寄与を足すと、積分範囲の変更に伴って出てきた項は相殺する。残る部分につ

いては、角度積分を先に実行できて

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\mathrm{int}}(\mathbf{x}) \approx & -\frac{4\pi G}{r}\int_0^r \rho(a')a'^2 da' - 4\pi G\int_r^R \rho(a')a' da' \\
& - \sum_{l,m}\frac{4\pi G}{2l+1}Y_{lm}(\mathbf{n})\left[\frac{1}{r^{l+1}}\int_0^r \rho(a')\frac{d}{da'}\left(a'^{l+3}f_{lm}\right)da' + r^l\int_r^R \rho(a')\frac{d}{da'}\left(a'^{2-l}f_{lm}\right)da'\right], \qquad (32)
\end{aligned}
$$

が得られる。一行目は (28) および (31) のうち f_{lm} を含まない項からの寄与で、角度積分により $l \neq 0$ の項は落ちた。二行目は (28) および (31) で f_{lm} を含んでいた項からの寄与である。さて、求めたいのは a 一定で特徴づけられる等ポテンシャル面の形状なので、独立変数は r から a に変更したい。この 2 つの違いが重要になるのは摂動量を含まない一行目であるが、積分範囲に表れる r は、第一項と第二項とを合わせて考える限り先の議論と同様にして a に変更できる。一方、$1/r$ は

$$
\frac{1}{r} \approx \frac{1}{a}\left[1 - \sum_{l,m} f_{lm}(a)Y_{lm}(\mathbf{n})\right] \qquad (33)
$$

で書き換える必要がある。Lagrange 座標 a に対する背景での質量分布[*6]

$$
m(a) := 4\pi\int_0^a \rho(a')a'^2 da' \qquad (34)
$$

を用いると

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\mathrm{int}}(a,\theta,\varphi) \approx & -\frac{Gm(a)}{a}\left[1 - \sum_{l,m} f_{lm}(a)Y_{lm}(\mathbf{n})\right] - 4\pi G\int_a^R \rho(a')a' da' \\
& - \sum_{l,m}\frac{4\pi G}{2l+1}Y_{lm}(\mathbf{n})\left[\frac{1}{a^{l+1}}\int_0^a \rho(a')\frac{d}{da'}\left(a'^{l+3}f_{lm}\right)da' + a^l\int_a^R \rho(a')\frac{d}{da'}\left(a'^{2-l}f_{lm}\right)da'\right] \qquad (35)
\end{aligned}
$$

が得られる。

今の場合、外場は本質的に自由に与えられる量である。そこで、Laplace 方程式の正則な解の一般的な球面調和関数展開を用いて

$$
\Phi_{\mathrm{ext}}(\mathbf{x}) = \sum_{l,m}\frac{4\pi G}{2l+1}d_{lm}r^l Y_{lm}(\mathbf{n}) \qquad (36)
$$

と書き、係数 d_{lm} で特徴づける。ただしこの 1.2 節の冒頭で述べた仮定により $d_{00} = 0$ とする。連星を考える場合、伴星の質量や連星間距離といった性質は d_{lm} に反映される。この d_{lm}、より正確にはそれを無次元化した $d_{lm}R^{l+1}/M$ は f_{lm} と同じく摂動の 1 次と扱うことにすれば、外場についても

$$
\Phi_{\mathrm{ext}}(a,\theta,\varphi) \approx \sum_{l,m}\frac{4\pi G}{2l+1}d_{lm}a^l Y_{lm}(\mathbf{n}) \qquad (37)
$$

と独立変数を自明に a に置き換えられる。なお、$r^{-(l+1)}$ の形の原点で発散する解は Φ_{int} を星の外で評価したときに表れる。

[*6] 摂動に $l = 0$ モードがある場合は摂動後の質量分布にはならない

自己場と外場とを足した全重力ポテンシャル Φ が a 一定面で一定であるためには、独立変数を (a,θ,φ) と取ったときに $l=0$ モードしか含まれないことが要請される。すると、Y_{lm}^* との内積を取ることにより、$l \neq 0$ のモードについて

$$\frac{1}{a^{l+1}}\int_0^a \rho \frac{d}{da'}\left(a'^{l+3} f_{lm}\right) da' + a^l \int_a^R \rho \frac{d}{da'}\left(a'^{2-l} f_{lm}\right) da' - \frac{2l+1}{4\pi}\frac{m(a)}{a} f_{lm} - d_{lm} a^l \approx 0 \tag{38}$$

が静水圧平衡と等価な条件を与えることがわかる。この式ではもはや摂動量しかないため、変数 a を r に置き換えて

$$\frac{1}{r^{l+1}}\int_0^r \rho \frac{d}{dr'}\left(r'^{l+3} f_{lm}\right) dr' + r^l \int_r^R \rho \frac{d}{dr'}\left(r'^{2-l} f_{lm}\right) dr' - \frac{2l+1}{4\pi}\frac{m(r)}{r} f_{lm} - d_{lm} r^l \approx 0 \tag{39}$$

と書いても構わない。この 1.2.1 節の以降の議論では Lagrange 座標 a を廃し、全て Euler 座標 r に統一する[*7]。また、摂動の 1 次での意味だった $\approx$ も以降では $=$ で表す。

まずこの (39) を r^l で割って r で微分すると、f_{lm} のみを含んだ式

$$\int_0^r \rho \frac{d}{dr'}(r'^{l+3} f_{lm}) dr' = \frac{m(r) r^l}{4\pi}\left[(l+1) f_{lm} - r\frac{df_{lm}}{dr}\right] \tag{40}$$

が得られる。さらにこれをもう一度 r で微分することにより、Clairaut 方程式

$$r^2 \frac{d^2 f_{lm}}{dr^2} + \frac{6\rho}{\bar{\rho}}\left(r\frac{df_{lm}}{dr} + f_{lm}\right) - l(l+1) f_{lm} = 0 \tag{41}$$

が得られる。ただしここで背景の平均密度

$$\bar{\rho}(r) := \frac{3m(r)}{4\pi r^3} \tag{42}$$

を定義した。中心付近では $m \to 4\pi\rho r^3/3$ および $\bar{\rho} \to \rho$ となることを用いれば、$l \geq 2$ のときに[*8]摂動は原点で正則性条件

$$f_{lm}(r \to 0) \propto r^{l-2} \tag{43}$$

を満たさなければならないことがわかる。

この 2 階微分方程式 (41) の解を一意に定めるにはもう一つ条件が必要である。これは f_{lm} に線形な Clairaut 方程式 (41) だけでは規格化が定まらないことを反映しており、与えられた外場と星の表面で接続することがそれを定める。星表面での接続条件は、(40) を (39) に代入し、星表面で評価することで

$$R\left.\frac{df_{lm}}{dr}\right|_{r=R} + l f_{lm}(R) = -\frac{4\pi R^{l+1}}{M} d_{lm} \tag{44}$$

と得られる。この式は (39) に r^{l+1} をかけ、r で微分したものを星表面で評価することでも得られる。

Clairaut 方程式は同次形なので、変形 f_{lm} の対数微分

$$\eta_l(r) := \frac{r}{f_{lm}}\frac{df_{lm}}{dr} \tag{45}$$

[*7] 今の場合は単に記号を置き換えたと思っても構わない

[*8] $l = 0, 1$ モードは一般に質量、重心位置の摂動にそれぞれ対応し、個別の議論が必要になるのでここでは省略

を導入することが有用と期待できる。Clairaut 方程式自身はモード m の値に依存しないので[*9]、ここでの添字は l のみとした。これを用いた変形により得られる

$$r\frac{d\eta_l}{dr}+\eta_l(\eta_l-1)+\frac{6\rho}{\bar{\rho}}(\eta_l+1)-l(l+1)=0 \tag{46}$$

を Radau 方程式と呼ぶ。この変数での正則性条件は、やはり $l\geq 2$ に対して

$$\eta_l(r\to)=l-2 \tag{47}$$

となる。Radau 方程式は非線形なので、外場を考慮せずとも中心から星表面まで解くことができる。もちろん、$\eta_l(r)$ から $f_{lm}(r)$ を定める際には規格化が定まらないので、これを求める場合はやはり外場との接続条件

$$[\eta_l(R)+l]f_{lm}(R)=-\frac{4\pi R^{l+1}}{M}d_{lm} \tag{48}$$

が必要である。

1.2.2　星の外部

これで外場の下での星の変形が記述できたので、星の外部での重力ポテンシャルも求めることができる。ここでは $\mathbf{x}=(r,\theta,\varphi)$ を星の外と考え、外場は引き続き (36) で与えられているものとする。

星が作る重力ポテンシャル $\Phi_{\rm int}$ の計算は、$\Phi_{{\rm int},<}$ を星の外部で評価することと等価であり、多重極モーメント

$$I_{lm}:=\int_{\mathbf{n}'}\int_0^\infty \rho(\mathbf{x}')r'^{l+2}Y^*_{lm}(\mathbf{n}')dr'd\mathbf{n}' \tag{49}$$

を用いて

$$\Phi_{\rm int}(\mathbf{x})=-\sum_{l,m}\frac{4\pi G}{2l+1}\frac{I_{lm}Y_{lm}(\mathbf{n})}{r^{l+1}} \tag{50}$$

と書ける。多重極モーメントを求める積分は、やはり $\Phi_{{\rm int},<}$ の計算と同様に実行できて

$$\begin{aligned}
I_{lm}&\approx\int_{\mathbf{n}'}\int_0^R\rho(a')\left[a'^{l+2}+\sum_{k,n}\frac{d}{da'}\left(a'^{l+3}f_{kn}\right)Y_{kn}(\mathbf{n}')\right]Y^*_{lm}(\mathbf{n}')da'd\Omega' && (51)\\
&=\frac{M}{\sqrt{4\pi}}\delta_{l0}+\int_0^R\rho(a')\frac{d}{da'}\left(a'^{l+3}f_{lm}\right)da' && (52)\\
&\approx\frac{M}{\sqrt{4\pi}}\delta_{l0}+\frac{MR^l}{4\pi}\left[l+1-\eta_l(R)\right]f_{lm}(R) && (53)
\end{aligned}$$

となる。ここで、表面では角度によらず $a=R$ であることに注意し、最後の行を導くには (40) を星表面で評価した関係式を用いた。残った $f_{lm}(R)$ を (48) を用いて消去することで

$$I_{lm}\approx\frac{M}{\sqrt{4\pi}}\delta_{l0}-\frac{l+1-\eta_l(R)}{\eta_l(R)+l}R^{2l+1}d_{lm} \tag{54}$$

と、外場 d_{lm} で多重極モーメントを表すことができる。また、$d_{00}=0$ としているので星の質量 $\sqrt{4\pi}I_{00}$ が変わっていないことも確認できる。

[*9] 背景が球対称であるため

多重極モーメントに表れる係数から潮汐 Love 数

$$k_l := \frac{l+1-\eta_l(R)}{2[\eta_l(R)+l]} \tag{55}$$

を定義すると、$l \neq 0$ の慣性モーメントは

$$I_{lm} \approx -2k_l R^{2l+1} d_{lm} \tag{56}$$

と表され、重力ポテンシャルは全体で

$$\Phi(\mathbf{x}) \approx -\frac{GM}{r} + \sum_{l,m} \frac{4\pi G}{2l+1} \left[1 + 2k_l \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+1}\right] d_{lm} r^l Y_{lm}(\mathbf{n}) \tag{57}$$

と書ける。これが意味するところは、外場 d_{lm} が加わると星が変形するため、星の質量が作る通常の単極ポテンシャルに加えて、誘起された多重極モーメントがさらに非等方な重力場を生み出す、ということである。通常の星では k_l は正の量で、星の変形は外場をさらに増幅する方向に働く。

潮汐変形率は、まず $ML^{2(l-1)}T^2$ の次元を持つ量として

$$\lambda_l := \frac{2}{(2l-1)!!G} k_l R^{2l+1} \tag{58}$$

により定義される。星の性質のうち、加わった外場に応じて重力場を生じさせる程度、つまり重力ポテンシャルの中に表れる組み合わせとしては、潮汐 Love 数 k_l よりもむしろ潮汐変形率 $\lambda_l \propto k_l R^{2l+1}$ の方が直接的であり、特にこの量を一般相対論的重力場に拡張する際にはこの事実が効いてくる [4]。この係数のうち分子の 2 は既に表れている Love 数の慣習的な定義を反映しているだけだが、一方で分母が $(2l-1)!!$ と選ばれる理由は球座標と直交座標との違いに起因し、これは 2 節で説明する。重力波天文学において頻繁に用いられる無次元の潮汐変形率 Λ_l は、この λ_l を

$$\Lambda_l := G\lambda_l \left(\frac{c^2}{GM}\right)^{2l+1} \tag{59}$$

と相対論的に[*10]無次元化して得られる量である。特に最も重要になる $l=2$ の潮汐変形率を $\lambda := \lambda_2, \Lambda := \Lambda_2$ と書くことが多い。これらの量は今の手続きでは星の中心密度 ρ_c の関数と見るのが自然であるが、星の中心密度が決まれば質量 M も決まるので、しばしば直接観測可能な質量の関数 $\Lambda(M)$ などとみなされる。

2 連星潮汐変形率 $\tilde{\Lambda}$

連星の軌道運動やそれに伴って放射される重力波波形は、質量や潮汐変形率など星の性質によって定まる。連星には星が 2 つあるため、これらの性質は特定の組み合わせを通じてとりわけ大きな影響を及ぼし、例えば質量についてはチャープ質量が最も大きな影響を及ぼす組み合わせであることが知られている（これも後述）。この 2 節では、潮汐変形率 Λ がどのように連星の軌道運動や重力波波形を影響するかを見ることで、最も影響のある組み合わせを見出して連星潮汐変形率 $\tilde{\Lambda}$ を定義する。単独の星を扱う場合とは違い、連星を扱う際に球座標は必ずしも有効でない。位置 x^i や速度 v^i を星全体で積分することにより星の重心位置や運動量を定義することを考えれば、系の重心を原点とした直交座標を導入するのが最も見通しがよい[*11]。そこで、2 節では直交座標 (x, y, z) を採用し、共変微分を偏微分と同一視する。とりわけ $\partial^i := f^{ij}\partial_j$ とする。

[*10] 光速度 c を用いていることに注意

[*11] もう少し数学的な事情としては、直交座標ではベクトルなどの基底が場所に依存しないために積分がスカラー量のように実行できる。一般相対論的重力を考え、時空が曲がるとこれは成り立たない

連星のそれぞれを A, B と名付ける。星 A を構成する物質が存在する領域も同じ記号を用いて A、同じく星 B について B と表記する。どちらの星に属する物質かは領域で区別されるので、密度場や速度場を A, B それぞれの星で別々に定義することはしない。場の引数 $(t, \mathbf{x})$ は場合に応じて記載するが、煩雑になるため混乱を招かないであろう範囲で省略する。積分により得られる星の大局量には添字 A, B をつけるが、この添字の上下に意味はなく、ただテンソルの添字と重ならないように書くようにしている。

本節の議論は [6] の Sec. 2、[5] の前半および [3] の 1.6 節を参考にした。また、球面調和関数との対応を含め対称トレースレステンソルの一般論については [3] の 1.5.3 節に譲る。

2.1　潮汐テンソルと潮汐変形率

1 節で説明しなかった潮汐変形率の定義、特にその係数を改めて検討する。繰り返しになるが、星中心を原点とする球座標では

$$I_{lm} = \int_{\mathbf{n}'} \int_0^\infty \rho(\mathbf{x}') r'^{l+2} Y^*_{lm}(\mathbf{n}') dr' d\mathbf{n}' \tag{60}$$

$$\Phi_{\mathrm{ext}}(\mathbf{x}) = \sum_{l,m} \frac{4\pi G}{2l+1} d_{lm} r^l Y_{lm}(\mathbf{n}) \tag{61}$$

の間に

$$I_{lm} = -2k_l R^{2l+1} d_{lm} \tag{62}$$

という関係が成り立っていた。直交座標を用いて連星の運動を調べるため、この比例関係が直交座標に自然な量でどう表現されるかを見る。この 2.1 節だけは座標系が混ざるので、共変微分をそのままにしておく。

まずこの段落で、詳細は [3] の 1.5.3 節などに譲ることとして、必要な一般論を述べる。球面調和関数と同じく角度方向の Laplacian に対する固有関数であり、直交座標でより扱いやすい量として、単位ベクトル $n^i := x^i/r$ を l 個並べてトレースレスにした $n^{\langle L\rangle} := n^{\langle i_1} \dots n^{i_l\rangle}$ が

$$\Delta_{\mathbf{n}} n^{\langle L\rangle} = -l(l+1) n^{\langle L\rangle} \tag{63}$$

を満たす[*12]。3 次元の対称な l 階テンソルの ${}_{l+2}C_2$ 自由度がトレースレス条件により ${}_lC_2$ 自由度だけ拘束されているので、$n^{\langle L\rangle}$ は次数 l の球面調和関数と同じく $2l+1$ 自由度を持つこともわかる。球面調和関数との関係をつけるため、定数テンソル $\mathcal{Y}^{\langle L\rangle}_{lm}$ を用いて

$$n^{\langle L\rangle} = \frac{4\pi l!}{(2l+1)!!} \sum_m \mathcal{Y}^{\langle L\rangle}_{lm} Y_{lm}(\mathbf{n}) \tag{64}$$

という形で展開を定義すると

$$Y_{lm}(\mathbf{n}) = \mathcal{Y}^{*\langle L\rangle}_{lm} n_{\langle L\rangle} \tag{65}$$

という逆関係が従う[*13]。

[*12] 例えば、対称トレースレスな定数テンソル $C_{\langle L\rangle}$ との縮約をとったスカラー量 $C_{\langle L\rangle} n^{\langle L\rangle} = C_{\langle L\rangle} n^L$ に角度方向の Laplacian を作用させる

[*13] $n^{\langle L\rangle}$ に $Y^*_{lm}(\mathrm{n})$ をかけて積分することで $\mathcal{Y}^{\langle L\rangle}_{lm}$ を $n^{\langle L\rangle}$ で表し、別の方向を向いた $n'_{\langle L\rangle}$ と縮約を取る

球面調和関数展開で定義した多重極モーメント I_{lm} は、直交座標ではトレースレスの多重極モーメントに対応する。具体的には、球面調和関数を $n^{\langle L\rangle}$ で書き換えることで

$$I_{lm} = \int_{\mathbf{n}}\int_0^\infty \rho(\mathbf{x}) r^{l+2} Y^*_{lm}(\mathbf{n}) dr d\mathbf{n} \tag{66}$$
$$= \int \rho(\mathbf{x}) x^{\langle L\rangle} \mathcal{Y}_{lm\langle L\rangle} d^3x \tag{67}$$
$$= \mathcal{Y}_{lm\langle L\rangle} I^{\langle L\rangle} \tag{68}$$
$$I^{\langle L\rangle} := \int \rho(\mathbf{x}) x^{\langle L\rangle} d^3x \tag{69}$$

が得られる。ここで定義された（対称）トレースレスの多重極モーメント $I^{\langle L\rangle}$ は、しばしば換算多重極モーメントと呼ばれる[*14]。逆に

$$I^{\langle L\rangle} = \frac{4\pi l!}{(2l+1)!!}\sum_m \mathcal{Y}^{*\langle L\rangle}_{lm} I_{lm} \tag{70}$$

であることも示せる。これらの変形では $n^{\langle L\rangle}$ が実数であることを用いた。

次に外場の重力ポテンシャルを書き換えるが、先に直交座標を見据えて、原点を中心とした Taylor 展開

$$\Phi_{\rm ext}(\mathbf{x}) = \sum_l \frac{1}{l!} x^L \mathcal{E}_L \tag{71}$$
$$\mathcal{E}_L := \nabla_L \Phi_{\rm ext}\big|_{\mathbf{x}=0} \tag{72}$$

により、潮汐テンソル $\mathcal{E}_L$ を用いた表式を導入しておく。平坦計量の共変微分は可換なので[*15]、$\mathcal{E}_L$ は任意の添字について対称である。また、外場は Laplace 方程式を満たす正則な真空解なので、やはり共変微分の可換性から $\mathcal{E}_L$ は任意の添字 2 つの組についてトレースレスでもある。つまり $\mathcal{E}_L = \mathcal{E}_{\langle L\rangle}$ なので、x^L を $x^{\langle L\rangle}$ で置き換えて

$$\Phi_{\rm ext}(\mathbf{x}) = \sum_l \frac{1}{l!} x^{\langle L\rangle} \mathcal{E}_L \tag{73}$$

と書くこともできる。このテンソル $\mathcal{E}_L$ の組の中で、スカラー $\mathcal{E}$ は力に寄与しない定数項、ベクトル $\mathcal{E}_i$ は一様な重力場を表し重心運動をもたらす部分である。2 階のテンソル $\mathcal{E}_{ij}$ 以上の項が重力場の非一様性、すなわち潮汐場を表す。球面調和関数での表式が

$$\Phi_{\rm ext}(\mathbf{x}) = \sum_{l,m} \frac{4\pi G}{2l+1} d_{lm} r^l Y_{lm}(\mathbf{n}) \tag{74}$$
$$= \sum_{l,m} \frac{4\pi G}{2l+1} d_{lm} x^{\langle L\rangle} \mathcal{Y}^*_{lm\langle L\rangle} \tag{75}$$

と書き換えられることを用いると、潮汐テンソルは球面調和関数展開での係数と

$$\mathcal{E}_L = \frac{4\pi l! G}{2l+1}\sum_m \mathcal{Y}^*_{lm\langle L\rangle} d_{lm} \tag{76}$$

のように関係づくことがわかる。

[*14] 換算多重極モーメントを斜体の $\mathcal{I}^L$ などで表す文献もある

[*15] 直交座標を取って偏微分の可換性からと思ってもよいが、この表式自体は直交座標でなくても成り立つことに注意。また、対称でない部分があっても x^L と縮約を取るため重力ポテンシャルには効かない、と言うこともできる

球座標での関係式 (62) の両辺に $[(4\pi l!)/(2l+1)!!]\sum_m \mathcal{Y}^{*\langle L\rangle}_{lm}$ をかけると、ここまでに導いた関係式から

$$I_{\langle L\rangle} = -\lambda_l \mathcal{E}_L \tag{77}$$

が得られる。潮汐変形率の比例係数は、この関係が最も単純になるように定義されていた。

2.2 運動方程式

連星の軌道運動を得るため、流体でできた星が全体としてどう運動するかを調べる。もちろん流体力学の方程式を全て解くことができれば運動も定まるが、数値シミュレーションが必須で複雑であり、また潮汐変形率など星の大局量がどのように反映されるかを見るにも不向きである。よって、ここでは質点の運動方程式を拡張し、質量や多重極モーメントなどの大局量によって特徴づけられる星 A の運動方程式を導く。もちろん、星 B についても全く同様である。

準備として、関数 $f(t,\mathbf{x})$ を星 A において密度 $\rho(t,\mathbf{x})$ で重み付けした積分の時間変化は、連続の式を用いると

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_A \rho(t,\mathbf{x})f(t,\mathbf{x})d^3x &= \int_A [\rho\partial_t f + f\partial_t \rho]d^3x && (78)\\
&= \int_A [\rho\partial_t f - f\partial_i(\rho v^i)]d^3x && (79)\\
&= \int_A [\rho\partial_t f + \rho v^i \partial_i f]d^3x - \oint f\rho v^i dS_i && (80)\\
&= \int_A \rho\frac{df}{dt}d^3x && (81)
\end{aligned}$$

と表せることを確認する。このとき、Gauss 積分によって発散の体積積分を星を取り囲む任意の閉曲面での表面積分に直し、そこでは密度がゼロになることを用いて落とした。

まず星を特徴付ける大局量のうち、特に重要なものを定義する。星の質量は 1 節と同様に

$$M_A(t) := \int_A \rho(t,\mathbf{x})d^3x \tag{82}$$

により定義される。この時間微分は (81) で $f=1$ の場合に対応してゼロとなり、質量は時間変化しないことが示される。以降、質量の時間依存性は省く。次に星の重心位置を

$$z^i_A(t) := \frac{1}{M_A}\int_A \rho(t,\mathbf{x})x^i d^3x \tag{83}$$

で定義する。この時間微分は (81) で $f=x^i$ の場合に対応し、星の重心速度

$$\dot{z}^i_A(t) = \frac{1}{M_A}\int_A \rho(t,\mathbf{x})v^i(t,\mathbf{x})d^3x \tag{84}$$

を与える。これをさらにもう一度 (81) によって微分し、非保存形の Euler 方程式を用いれば運動方程式

$$M_A\ddot{z}^i_A = \int_A(-\partial^i P - \rho\partial^i\Phi_A - \rho\partial^i\Phi_B)d^3x \tag{85}$$

が得られる。ただし、重力ポテンシャルは

$$\Phi = \Phi_A + \Phi_B \tag{86}$$

$$\Phi_A(t,\mathbf{x}) = -G\int_A \frac{\rho(t,\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x' \tag{87}$$

$$\Phi_B(t,\mathbf{x}) = -G\int_B \frac{\rho(t,\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x' \tag{88}$$

と、自己場 Φ_A および外場 Φ_B に分けた。これらはそれぞれ 1 節の $\Phi_{\rm int}$ および $\Phi_{\rm ext}$ に対応するが、今の外場は 1 節のように手で与えられたものではなく、伴星 B が作る重力ポテンシャルである。

この運動方程式を用いると、星 A の重心運動に寄与するのは外場 Φ_B のみで、自身の圧力勾配 $-\partial^i P$ および自己重力 $-\rho\partial^i\Phi_A$ は寄与しないことが示せる。まず圧力勾配はただの偏微分なので、積分すれば表面項になって消える[*16]。自己重力については

$$-\int_A \rho(\mathbf{x})\frac{\partial\Phi_A(\mathbf{x})}{\partial x^i}d^3x = G\int_A \rho(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x^i}\int_A \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x'd^3x \tag{89}$$

$$= -G\int_A\int_A (x-x')_i\frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}d^3xd^3x' \tag{90}$$

$$= 0 \tag{91}$$

によりやはり消えることが示される。最後の変形は、被積分関数が x^i と x'^i との入れ替えについて反対称であり、全体として自身の負符号と等しいために成り立つ。これらは作用反作用の法則により当然期待される結果である。

この考察により、重心運動は

$$M_A\ddot{z}^i_A = \int_A -\rho\partial^i\Phi_B d^3x \tag{92}$$

で与えられることがわかる。さらに計算を進めるため、重力ポテンシャルの展開 (73) を重心位置 z^i_A の周りで行った

$$\Phi_B(t,\mathbf{x}) = \sum_l \frac{1}{l!}(x-z_A)^{\langle L\rangle}\mathcal{E}^A_L(t) \tag{93}$$

$$\mathcal{E}^A_L(t) := \partial_L\Phi_B|_{t,\mathbf{x}=\mathbf{z}_A(t)} \tag{94}$$

を用いて[*17]、運動方程式を

$$M_A\ddot{z}^A_i = -\sum_l \frac{1}{l!}I^{\langle L\rangle}_A(t)\mathcal{E}^A_{iL}(t) \tag{95}$$

$$I^{\langle L\rangle}_A(t) := \int_A \rho(t,\mathbf{x})(x-z_A)^{\langle L\rangle}d^3x \tag{96}$$

と書き換える。この換算多重極モーメントテンソル $I^{\langle L\rangle}_A$ も A の重心について定義されていることに注意。なお、$I_A = M_A$ かつ重心の定義により $I^i_A = 0$ なので、最低次の非自明な換算多重極モーメントは四重極 $I^{\langle ij\rangle}_A(t)$ である。この運動方程式は、重力ポテンシャルの勾配が質量に比例した一様な重力を及ぼすのに加えて、密度分布が球対称からずれるとその換算多重極モーメントが潮汐場と結合することでさらなる力が生じる

[*16] 定数ベクトルとの内積を取って Gauss の定理を使う、と考えた方が見慣れた形になるかもしれない

[*17] ここでは添字の上下を混在させないようにしているが、直交座標を使う場合は（時空が曲がっていなければ）区別しなくてもよい

ことを意味している。この運動方程式を解いて具体的な運動を得るためには、$I_A^{\langle L\rangle}(t)$ および $\mathcal{E}_L^A(t)$ を定められればよい。

潮汐テンソル $\mathcal{E}_L^A$ は外場 $\Phi_B(t,\mathbf{x})$ が決まれば定まる。Green 関数での積分を実行するために、その分母を星 B の重心 $\mathbf{z}_B$ まわりで

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \sum_k \frac{1}{k!}(x'-z_B)^{\langle K\rangle}\partial'_K\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)_{\mathbf{x}'=\mathbf{z}_B(t)} \tag{97}$$

$$= \sum_k \frac{(-1)^k}{k!}(x'-z_B)^{\langle K\rangle}\partial_K\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}_B(t)|}\right) \tag{98}$$

と展開する。ここで x'^i での偏微分 ∂'_i を用いたが、微分される関数が x^i, x'^i に関して反対称であることを用いて ∂_i に書き換え、もはや微分されない x'^i を最終的に微分を評価したかった位置 z_B^i で置き換えた。また、今は x^i として星 A を考えているので、添字 K についてはトレースレス部分を取ってよい。すると Green 関数の積分は

$$\Phi_B(t,\mathbf{x}) = -G\int_B \sum_k \frac{(-1)^k}{k!}\rho(t,\mathbf{x}')(x'-z_B)^{\langle K\rangle}\partial_K\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}_B(t)|}\right)d^3x' \tag{99}$$

$$= -\sum_k \frac{(-1)^k}{k!}GI_B^{\langle K\rangle}(t)\partial_K\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}_B(t)|}\right) \tag{100}$$

と、星 B の換算多重極モーメントと $1/|\mathbf{x}-\mathbf{z}_B|$ の微分との縮約で書ける。例えば $k=0$ は質点による通常の重力ポテンシャル $-GM/|\mathbf{x}-\mathbf{z}_B|$ に対応する。

潮汐テンソルは、$1/|\mathbf{x}-\mathbf{z}_B|$ を通してのみ x^i に依存するこの重力ポテンシャルを微分すれば得られる。これを代入すると、運動方程式 (95) は

$$M_A\ddot{z}_i^A = \sum_{l,k}\frac{(-1)^k}{l!k!}GI_A^{\langle L\rangle}I_B^{\langle L\rangle}\partial_{iLK}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}_B|}\right)_{\mathbf{x}=\mathbf{z}_A} \tag{101}$$

となる。この式を見ると、星 A が球対称で質量単極子以外の換算多重極モーメント $I_A^{\langle L\rangle}$ を持たなくても、星 B が変形していれば重力ポテンシャルが点粒子による GM/r から変わるため、運動も点粒子同士の引力によるものから変わることがわかる。一般に 2^l-2^k 重極相互作用は、常に連星間距離 r の逆数の $l+k+1$ 階微分を伴い、力で言えば $1/r^{l+k+2}$ の依存性を持つ。一方 2^l 重極モーメントは、それを定義する積分が $(x-z)^{\langle L\rangle}$ を含むことから、典型的に星の半径 R に対して R^l の依存性を持つ。よって、2^l-2^k 重極相互作用は点粒子相互作用に比べて $(R/r)^{l+k}$ だけ抑制されることがわかる。そのため、特に連星間距離が星の半径に比べて十分大きい場合は、低次の多重極相互作用が星の運動に主な影響を及ぼす。

2.3 連星軌道

ここからは一般性を犠牲に、点粒子に加えて最も重要な潮汐効果である四重極を考え、さらに四重極同士の相互作用は無視する。また、換算四重極モーメントを $Q^{ij}(t) := I^{\langle ij\rangle}(t)$ と特別な記号で書くことにする。以降、時間依存性の表記は省く。運動方程式 (101) は

$$M_A\ddot{z}_i^A = GM_AM_B\partial_i\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}_B|}\right)_{\mathbf{x}=\mathbf{z}_A} + \frac{G}{2}[M_AQ_B^{jk}+M_BQ_A^{jk}]\partial_i\partial_j\partial_k\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}_B|}\right)_{\mathbf{x}=\mathbf{z}_A} \tag{102}$$

となる。同様の式が B についても成り立ち、ただし符号は逆で $M_B\ddot{z}_i^B = -M_A\ddot{z}_i^A$ となる。

点粒子の二体問題の取り扱いと同様に、連星の重心静止系に移り、相対座標を

$$z^i := z_A^i - z_B^i \tag{103}$$

で導入し、さらにこれを単位ベクトル n^i を用いて $z^i = rn^i$ と距離と方向とに分ける[*18]。(101) では $|\mathbf{x} - \mathbf{z}_B|$ を x^i で微分して $x^i = z_A^i$ で評価しているが、これは r を z^i で微分するのと等価である。以降この 2.3 節では、∂_i は z^i での偏微分を表すとする。このとき、$z_A^i \neq z_B^i$ より $r = 0$ とはならないことを考慮すれば

$$\partial_L \left(\frac{1}{r}\right) = (-1)^l (2l-1)!! \frac{n_{\langle L \rangle}}{r^{l+1}} \tag{104}$$

が成り立つ[*19]。具体例として

$$\partial_i \left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{n_i}{r^2} \tag{105}$$

$$\partial_i \partial_j \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3n_i n_j - \delta_{ij}}{r^3} \tag{106}$$

$$\partial_i \partial_j \partial_k \left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{15 n_i n_j n_i - 3(\delta_{ij} n_k + \delta_{jk} n_i + \delta_{ki} n_j)}{r^4} \tag{107}$$

が以降で用いられる。これにより、星 A の運動方程式は

$$M_A \ddot{z}_i^A = -\frac{G M_A M_B}{r^2} n_i - \frac{15G}{2r^4} [M_A Q_B^{jk} + M_B Q_A^{jk}] n_{\langle ijk \rangle} \tag{108}$$

と変形できる。同様に星 B の運動方程式も、z_B^i の側の微分は z^i での微分と符号が異なることに注意すれば導くことができ、合わせると相対運動は全質量 $M := M_A + M_B$ を用いて

$$\ddot{z}^i = -\frac{GM}{r^2} n^i - \frac{15GM}{2r^4} \left(\frac{Q_{jk}^A}{M_A} + \frac{Q_{jk}^B}{M_B}\right) n^{\langle ijk \rangle} \tag{109}$$

に従うことがわかる。

この運動方程式を解くためには $Q_{ij}(t)$ を定める構成方程式が必要である。本来これは流体の運動を解くことによって時々刻々その変動が定まるものであるが、連星の軌道運動の時間スケール（軌道周期）が星の変形が落ち着く時間スケール（星の力学的時間）に比べて十分長いとすれば、1 節で求めた静的な変形として潮汐 Love 数あるいは潮汐変形率で記述できる。このような潮汐変形を連星軌道の文脈では断熱潮汐 (adiabatic tide) あるいは静的潮汐 (static tide)[*20]と呼び、星 A について (77) から

$$Q_{ij}^A = -\lambda_A \mathcal{E}_{ij}^A \tag{110}$$

と置ける。星 B についても同様である。今は四重極同士の相互作用は考えないことにしており、伴星の四重極モーメントが誘起する四重極モーメントは考慮しなくてよいので、右辺は質量に由来する重力ポテンシャル

---

*18 ここまでの r, n^i と少し定義が違うが、混乱はないものと期待する

*19 $n_L/r^{l+1} = z_L/r^{2l+1}$ の項から比例係数が決まり、残りは左辺が対称トレースレスであることを反映して決まる、と思ってよい。これも詳細は [3] の 1.5.3 節などを参照

*20 これらの語の日本語訳は見たことがないので、勝手に命名した

の微分で書ける。すると星 A での潮汐テンソルおよびその換算四重極モーメントは

$$\mathcal{E}^A_{ij} = -\partial_i\partial_j\left(\frac{GM_B}{r}\right) \tag{111}$$

$$= -\frac{3GM_B}{r^3}n_{\langle ij\rangle} \tag{112}$$

$$Q^A_{ij} = \frac{3G\lambda_A M_B}{r^3}n_{\langle ij\rangle} \tag{113}$$

と表すことができ、星 B についても同様である。

最終的に、単極-四重極相互作用までを考慮した相対運動の運動方程式は、断熱潮汐の下で

$$\ddot{z}^i = -\frac{GM}{r^2}n^i\left[1+\frac{9G}{r^5}\left(\frac{\lambda_A M_B}{M_A}+\frac{\lambda_B M_A}{M_B}\right)\right] \tag{114}$$

となる。これを満たす円軌道[*21]を求めるため、

$$r = \mathrm{const} \tag{115}$$

$$n^i = (\cos\Omega t, \sin\Omega t, 0) \tag{116}$$

の形の解を仮定すると、軌道角速度 Ω が満たす条件として

$$\Omega^2 = \frac{GM}{r^3}\left[1+\frac{9G}{r^5}\left(\frac{\lambda_A M_B}{M_A}+\frac{\lambda_B M_A}{M_B}\right)\right] \tag{117}$$

が得られる。これは $\lambda_A = \lambda_B = 0$ の場合は点粒子同士の Kepler 軌道に一致する (Kepler 第三法則)。星の場合、それぞれの星がお互いの潮汐力によって変形し、それが引力を増幅するため、同じ半径での円運動を維持するにはより強い角運動量障壁（あるいは遠心力）が、つまり大きな軌道角速度が要求される。

実際の重力波観測で直接得られるのは、連星間距離 r ではなく重力波の振動数 f であり、これは後で用いる四重極公式の範囲では $f = \Omega/\pi$ によって軌道角速度と結ばれる。そのため、独立変数も Ω に取るのが有益である。四重極以上の相互作用を無視することに対応し、$G\lambda/r^5$ が小さいとして r を Ω について解くと

$$r(\Omega) \approx \frac{(GM)^{1/3}}{\Omega^{2/3}}\left[1+3G\left(\frac{\lambda_A M_B}{M_A}+\frac{\lambda_B M_A}{M_B}\right)\frac{\Omega^{10/3}}{(GM)^{5/3}}\right] \tag{118}$$

が得られる。ここでの $\approx$ は「$G\lambda/r^5$ の 1 次で」の意味であり、これは連星間距離が星の半径よりも十分離れているときに妥当である。この記法は 2.4 節でも用いる。

2.4 重力波放射

潮汐変形率がどのように重力波波形を影響するか、四重極公式を用いて断熱近似の範囲で見る。一般には、重力波放射がエネルギーや角運動量を抜き去るため、連星の軌道は時々刻々と変化する。この放射反作用を真面目に扱うには Einstein 方程式を解かなければならないが容易ではなく、そもそも今まで Newton 重力で考えてきたこととも整合しない。そこで、放射反作用によって軌道が変化する時間スケールが、軌道運動自体の時間スケール（軌道周期）よりもずっと長い場合には、断熱近似が妥当であることを利用する。この近似の下では、放射反作用を軌道運動そのものを解いて取り入れるのではなく、何周もの軌道周期に渡って平均するこ

[*21] 一般には楕円軌道を考えることもできるが、重力波放射は離心率を急激に減らすため [7]、地上の重力波検出器で検出されるような状況では円軌道を考えるのが現実的である

とで、エネルギーなど軌道を特徴付ける量のゆっくりした変化として取り入れることができる。これは合体直前のごく短い時期を除き[22]、重力波を放射して連星軌道が進化していく過程のほとんどの時期で妥当である。

2.4.1 エネルギー

まず星同士の連星の軌道エネルギーを求める。特に系の各部分が持つ様々なエネルギーを、軌道運動に関係する部分と、単独の星で閉じているとみなせる部分とに分ける。運動エネルギーは各々の星について

$$T_A := \frac{1}{2}\int_A \rho v^2 d^3x \tag{119}$$

と定義できる。速度を重心運動の速度と重心に対する流体の内部運動の速度とに分けると

$$T_A = \frac{1}{2}\int_A \rho[\dot{z}_A + (v - \dot{z}_A)]^2 d^3x \tag{120}$$

$$= \frac{1}{2}M_A \dot{z}_A^2 + T_{\mathrm{int},A} \tag{121}$$

$$T_{\mathrm{int},A} := \frac{1}{2}\int \rho[v - \dot{z}_A]^2 d^3x \tag{122}$$

と書き換えることができる。ここで交差項は重心の定義によって消えることを用い、また内部運動に伴う運動エネルギーを $T_{\mathrm{int},A}$ とまとめた。重心速度 $\dot{z}_A^i$ は時間のみの関数であることを注記しておく。

次に重力エネルギーは

$$W_A := \frac{1}{2}\int_A \rho\Phi d^3x \tag{123}$$

と定義される。半分になっているのは、星 B の側でも持っている同様の寄与と合わせたとき時間的に保存するエネルギーを定義するためである。これは重力ポテンシャルが星 A 自身の作る自己場、星 B の作る外場に分けられることに対応して

$$W_A = W_{\mathrm{ext},A} + W_{\mathrm{int},A} \tag{124}$$

$$W_{\mathrm{ext},A} := \frac{1}{2}\int_A \rho\Phi_B d^3x \tag{125}$$

$$W_{\mathrm{int},A} := \frac{1}{2}\int_A \rho\Phi_A d^3x \tag{126}$$

と 2 つの量に分けられる。このうち $W_{\mathrm{int},A}$ は星 A 自身で閉じている量である。軌道を反映する部分 $W_{\mathrm{ext},A}$ は (93) を用いて

$$W_{\mathrm{ext},A} = \frac{1}{2}\int_A \sum_l \frac{1}{l!}\rho(x - z_A)^{\langle L\rangle}\mathcal{E}_L^A d^3x \tag{127}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_l \frac{1}{l!} I_A^{\langle L\rangle}\mathcal{E}_L^A \tag{128}$$

と、多重極モーメントと潮汐場との相互作用の形に書き換えられる。ここでは単極-四重極相互作用までしか考慮しないので、重力ポテンシャルの値 $\mathcal{E}^A$ そのものに星 B の換算四重極モーメントからの寄与 $-(3G/2r^3)Q_B^{ij}n_{\langle ij\rangle}$ があることに注意し、(112) も用いて

$$W_{\mathrm{ext},A} = -\frac{1}{2}\left[\frac{GM_AM_B}{r} + \frac{3G}{2r^3}(M_AQ_B^{ij} + M_BQ_A^{ij})n_{\langle ij\rangle}\right] \tag{129}$$

[22] もっともこの短い時期が、潮汐変形が最も激しくなり一番興味深い時間帯でもある

が得られる。

流体の場合は質点と異なり、構成要素が持つ内部エネルギーも考える必要がある。特に、それが軌道エネルギーとの間でどう受け渡されるかが軌道進化を決める上で重要となる。ここでは流体要素の内部エネルギーに加え、運動エネルギーの内部部分 T_{int}、重力エネルギーの内部部分 W_{int} も合わせて星の内部エネルギー U を定義する。つまり軌道運動のエネルギーが星に渡されたとき、それが流体の運動として蓄えられているのか、散逸の結果として流体の内部エネルギーに変わったのか、などを問わず、この U 全体で軌道運動のエネルギーとの受け渡しを行える星の内部エネルギーをまとめて記述する。内部エネルギーの変化は、星 A の重心運動を変化させるのが星 B による外力だけであったことを考えれば、流体要素が受ける外力を積分することによって得られる仕事

$$\dot{U}_A = \int_A (-\rho\partial_i\Phi_B)(v - \dot{z}_A)^i d^3x \tag{130}$$

$$= -\int_A \rho[\mathcal{E}_i^A + (x - z_A)^j \mathcal{E}_{ij}^A](v - \dot{z}_A)d^3x \tag{131}$$

$$= -\mathcal{E}_i^A \dot{I}_A^i - \mathcal{E}_{ij}^A \int_A \rho(v - \dot{z}_A)^i (x - z_A)^j d^3x \tag{132}$$

$$= -\frac{1}{2}\mathcal{E}_{ij}^A \dot{Q}_A^{ij} \tag{133}$$

で与えられる。ここで二行目への変形には (93) で四重極までしか考えないこと、三、四行目の変形では (81) に加えて双極子モーメント I_A^i は重心の定義からゼロであることを用いた。この内部エネルギーの変化を潮汐加熱 (tidal heating) と呼ぶ。さらにここで断熱潮汐 $Q_{ij}^A = -\lambda\mathcal{E}_{ij}^A$ も考えれば、内部エネルギーは原点の取り方の自由度を除いて[*23]

$$U_A = \frac{1}{4\lambda_A} Q_{ij}^A Q_A^{ij} \tag{134}$$

と書けることがわかる。なお、内部エネルギーを星 A 自身の性質と考えるためには、外場として加わる潮汐場 $\mathcal{E}_{ij}^A$ を含まない形に書くのが妥当である。この量は正定値なので、変形が進めば進むほど軌道運動のエネルギーは星に持ち去られることがわかる。

これらを用いて軌道の全エネルギーを書き下すと

$$E = \frac{1}{2}M_A\dot{z}_A^2 + \frac{1}{2}M_B\dot{z}_B^2 - \frac{GM_AM_B}{r} - \frac{3G}{2r^3}(M_AQ_B^{ij} + M_BQ_A^{ij})n_{\langle ij\rangle} + \frac{1}{4\lambda_A}Q_{ij}^AQ_A^{ij} + \frac{1}{4\lambda_B}Q_{ij}^BQ_B^{ij} \tag{135}$$

が得られる。換算質量 $\mu := M_AM_B/M$ を定義し、(113) および円運動の解 (117) を代入すると[*24]

$$E = -\frac{G\mu M}{2r}\left[1 - \frac{6G}{r^5}\left(\frac{\lambda_AM_B}{M_A} + \frac{\lambda_BM_A}{M_B}\right)\right] \tag{136}$$

が得られる。また (118) を用いると

$$E(\Omega) \approx -\frac{\mu}{2}(GM\Omega)^{2/3}\left[1 - 9G\left(\frac{\lambda_AM_B}{M_A} + \frac{\lambda_BM_A}{M_B}\right)\frac{\Omega^{10/3}}{(GM)^{5/3}}\right] \tag{137}$$

と、軌道角速度の関数としてのエネルギーを得ることもできる。

[*23] 孤立した静的球対称星が持つ（質量を除いた）全エネルギーに取るのが一つの自然な定め方であろう

[*24] 軌道の運動エネルギーが重心系では $\mu\dot{z}^2/2$ に、潮汐による重力エネルギーと内部エネルギーとの和が $Q_{ij}Q^{ij}/(4\lambda) = \lambda\mathcal{E}_{ij}\mathcal{E}^{ij}/4$ の形にまとまることを一旦見ると計算がしやすい

2.4.2　重力波光度

次に重力波によるエネルギー損失率、あるいは重力波光度を、一般相対論における最低次の近似である四重極公式を用いて求める。今、系全体の換算四重極モーメントは (113) も用いて

$$
\begin{aligned}
Q^{ij}_{\mathrm{tot}} &= \mu z^{\langle i} z^{j\rangle} + Q^{ij}_A + Q^{ij}_B &(138)\\
&= \left[\mu r^2 + \frac{3Gr^3}{r^3}(\lambda_A M_B + \lambda_B M_A)\right] n^{\langle ij\rangle} &(139)
\end{aligned}
$$

と、軌道に付随する部分と各々の星が持つ部分との和で書ける。重力波光度は

$$\mathcal{L} = -\frac{G}{5c^5}\dddot{Q}^{ij}_{\mathrm{tot}}\dddot{Q}^{\mathrm{tot}}_{ij} \tag{140}$$

で与えられ、ここで登場する時間微分は n^i にのみかかる。これは $\ddot{n}^i = -\Omega^2 n^i$ を用いれば

$$
\begin{aligned}
\frac{d^3}{dt^3}(n^i n^j) &= -4\Omega^3(\hat{v}^i n^j + n^i \hat{v}^j) &(141)\\
\hat{v}^i &:= (-\sin\Omega t, \cos\Omega t, 0) &(142)
\end{aligned}
$$

と書け、自ずと対称トレースレスとなるのでそのまま縮約を取ればよい。今考えている単極-四重極相互作用の範囲では星の四重極モーメントの積から来る寄与は無視できて、r と Ω とが混在した形で重力波光度は

$$\mathcal{L} = -\frac{32G\mu^2 r^4\Omega^6}{5c^5}\left[1 + \frac{6G}{\mu r^5}(\lambda_A M_B + \lambda_B M_A)\right] \tag{143}$$

と得られる。これも (118) によって軌道角速度だけの関数に書き換えることができ、

$$\mathcal{L}(\Omega) \approx -\frac{32\nu^2}{5Gc^5}(GM\Omega)^{10/3}\left\{1 + 6G\left[\frac{\lambda_A}{M_A}(2M_B + M) + \frac{\lambda_B}{M_B}(2M_A + M)\right]\frac{\Omega^{10/3}}{(GM)^{5/3}}\right\} \tag{144}$$

を得る。ただしここで対称質量比 (symmetric mass ratio)[*25]$\nu := \mu/M = M_A M_B/M^2$ を導入した。

最後に、これらの量を相対論的な表式でまとめる。そのために無次元の独立変数として、いわゆる post Newton パラメータ

$$x := \left(\frac{GM\Omega}{c^3}\right)^{2/3} \tag{145}$$

を導入する。この量は Kepler 運動の場合で $GM/(c^2 r)$ に等しいことはすぐに確かめられ、また（流体の速度場 v^i と文字が重複するが）そのときの軌道速度 $v := r\Omega$ を用いれば $(v/c)^2$ であることもわかる。軌道角速度で書くことには、既に述べた通り観測量である重力波の振動数と直接対応がつくという利点があり、一般相対論においてはゲージ不変量であるというさらなる利点がある。潮汐変形率は先に導入した無次元の Λ を用い、また質量比に関するパラメータとして $q_A := M_A/M$ を導入することで

$$
\begin{aligned}
E(x) &= -\frac{\nu Mc^2}{2}x[1 - 9\nu(q_A^3\Lambda_A + q_B^3\Lambda_B)x^5] &(146)\\
\frac{dE}{dx} &= -\frac{\nu Mc^2}{2}[1 - 54\nu(q_A^3\Lambda_A + q_B^3\Lambda_B)x^5] &(147)
\end{aligned}
$$

[*25] これも日本語訳は見ない

ならびに

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{32\nu^2 c^5}{5G} x^5 \{1 + 6[(q_A + 2\nu) q_A^3 \Lambda_A + (q_B + 2\nu) q_B^3 \Lambda_B] x^5\} \tag{148}$$

が得られる。ここでは $\nu = q_A q_B$ を用いて Λ_A が q_B と、Λ_B が q_A と直接かかって見えないように書き換えたが、本質的ではない。この 2 つから、post Newton パラメータの時間変化は

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\mathcal{L}}{dE/dx} \tag{149}$$

$$= \frac{64\nu}{5(GM/c^3)} x^5 \{1 + 6[(q_A + 11\nu) q_A^3 \Lambda_A + (q_B + 11\nu) q_B^3 \Lambda_B] x^5\} \tag{150}$$

と表される。なお GM/c^3 は時間の次元を持つ量である。ここで、$q_A = q_B = 1/2$ の等質量連星で $\Lambda_A = \Lambda_B$ のときにそれらと等しくなるように規格化した量 $\tilde{\Lambda}$ を導入すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{64\nu}{5(GM/c^3)} x^5 \left(1 + \frac{39}{8} \tilde{\Lambda} x^5\right) \tag{151}$$

$$\tilde{\Lambda} := \frac{16}{13} [(q_A + 11\nu) q_A^3 \Lambda_A + (q_B + 11\nu) q_B^3 \Lambda_B] \tag{152}$$

と、点粒子の場合の軌道進化に対する潮汐効果の補正を簡単な形にまとめることができる。この $\tilde{\Lambda}$ が重力波で最もよく測れる潮汐変形率の組み合わせ、連星潮汐変形率である。

この dx/dt を、(145) を用いて実際に観測できる重力波の振動数 f の変化 df/dt に書き直すと、$\Omega = \pi f$ も用いて

$$\frac{df}{dt} = \frac{96\pi}{5} \left(\frac{\pi G \mathcal{M} f}{c^3}\right)^{5/3} f^2 \left[1 + \frac{39}{8} \tilde{\Lambda} \left(\frac{\pi G M f}{c^3}\right)^{10/3}\right] \tag{153}$$

$$\mathcal{M} := \mu^{3/5} M^{2/5} = \nu^{3/5} M \tag{154}$$

と、潮汐効果は確かに $\tilde{\Lambda}$ の形で観測量を影響することがわかる。なお、潮汐効果の補正を受けない点粒子部分に表れる質量の次元を持つ量は $\mathcal{M}$ の形にまとめられた。これがチャープ質量である。

参考文献

[1] T. Mora, C. M. Will, Phys. Rev. D **69**, 104021 (2004)

[2] Z. Kopal “Close Binary Systems” (Chapman&Hill, 1959)

[3] E. Poisson, C. M. Will, “Gravity” (Cambridge University Press, 2014)

[4] T. Hinderer, Astrophys. J **677**, 1216-1220 (2008)

[5] T. Damour, in “Three Hundred Years of Gravitation” 128-198 (Cambridge University Press, 1987)

[6] J. E. Vines, É. É. Flanagan, Phys. Rev. D **88**, 024046 (2013)

[7] P. C. Peters, Phys. Rev. **136**, 1224-1232