

# 重力（2023 年度前期）

久徳 浩太郎

2023 年 8 月 18 日

# 目次

|       |                         |    |
|-------|-------------------------|----|
| 第 0 章 | 物理定数と天体                 | 1  |
| 第 1 章 | 自己重力流体と自己重力系の性質         | 4  |
| 1.1   | 基礎方程式                   | 4  |
| 1.2   | ビリアル定理                  | 12 |
| 第 2 章 | 重力不安定による構造形成            | 16 |
| 2.1   | 天体現象の時間スケール             | 16 |
| 2.2   | 臨界比熱比                   | 19 |
| 2.3   | Jeans 不安定               | 20 |
| 2.4   | 球対称等温重力崩壊の自己相似解         | 26 |
| 第 3 章 | 自己重力流体の平衡形状             | 31 |
| 3.1   | 球対称天体の平衡形状              | 31 |
| 第 4 章 | 流体から質点系へ                | 39 |
| 4.1   | 基礎方程式                   | 39 |
| 4.2   | 重心運動 (external problem) | 40 |
| 4.3   | 流体運動 (internal problem) | 43 |
| 第 5 章 | 質点系の運動 : 天体力学           | 45 |
| 5.1   | Kepler 運動               | 45 |
| 5.2   | 接触軌道法                   | 50 |
| 5.3   | Kepler 運動への摂動           | 55 |
| 付録 A  | 第 2 章補遺                 | 65 |
| A.1   | 球対称等温重力崩壊の自己相似解の系列      | 65 |
| 付録 B  | 第 3 章補遺                 | 69 |
| B.1   | Lane-Emden 方程式の数値解法     | 69 |
| 付録 C  | 第 4 章補遺                 | 71 |
| C.1   | 場の多重極モーメント              | 71 |

## 概要

2023 年度前期に行なった、天体物理を中心に Newton 重力の話題を扱う 4 回生向け講義「重力」の講義資料。講義中に扱えなかったいくつかの話題は、付録として記載した（ただし本文中にも扱えなかった話題がある）。他に降着円盤、回転星や連星の平衡形状、それらの振動や安定性、また運動論的な重力多体系の話題も考えていたが、時間がなかった。磁場や放射の議論が必要な話題は意図的に避けた。この文書はあくまで講義の補助教材なので、特にガイダンスに相当する第 0 章など単体で読んでも話の流れが見えづらと思うが、誰かの役に立つかもしれないと考え公開することにした。

## 第 0 章

# 物理定数と天体

この章の議論は

1. 須藤靖「ものの大きさ」(東京大学出版会)
2. A. Burrows, J. P. Ostriker, PNAS 111, 2409-2416 (2014), arXiv:1401.1814

を参考としている(が、大幅に端折ったので割とよくある議論になっているはずである)。

天体には良くも悪くも個性があり、何が物理の研究対象として面白いかは必ずしも自明でない。物理としての面白さを判断する上では、物理定数で決まる性質があればそれは普遍的な物理の対象とみなせるはずだ、という観点が一つの妥当な指針であろう。物理定数として最も基礎的なものはおそらく、光速  $c$ 、(換算) Planck 定数  $\hbar$ 、万有引力定数  $G$  の 3 つである\*1。この 3 つから次元のある量を作ろうとすると、例えば Planck 質量、Planck 長さ、Planck 時間などが

$$m_{\text{pl}} := \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{1/2}, \quad (1)$$

$$l_{\text{pl}} := \left( \frac{\hbar G}{c^3} \right)^{1/2}, \quad (2)$$

$$t_{\text{pl}} := \left( \frac{\hbar G}{c^5} \right)^{1/2} \quad (3)$$

と定義できる。しかし、さすがにこれらだけで天体の性質を議論するのは難しそうである。

どこまで基本的かはともかく、電荷素量  $e$ 、電子質量  $m_e$ 、陽子質量  $m_p$ 、中性子質量  $m_n$  なども、物理定数とみなしてよいだろう。実際のところ  $m_p \approx m_n$  なので、これらをほぼ同じと扱い、ともに  $m_p$  で表して核子質量と呼ぶことにする。この核子質量および上記の物理定数  $c$ ,  $\hbar$ ,  $G$  で記述できる天体の性質のうち、代表的なものが Chandrasekhar 質量 (Chandrasekhar 限界とも) である。ここでは数係数を無視した取り扱いにより、一体どのような理由により (ほぼ) 物理定数だけで天体の性質が決まるのかを見る。

球対称で静的 (運動しておらず時間変化しない、の意) な星を考える。静的ということは圧力勾配力と重力とがつりあった静水圧平衡が満たされており、数式で表せば

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \quad (4)$$

---

\*1 ここに Boltzmann 定数  $k_B$  を加えてもよいであろう。万有引力定数としては  $G$  でなく  $8\pi G$  を用いて諸量を定義する流儀も、特に Planck 質量に関してしばしば用いられる。

が成り立っているはずである。ここで半径  $r$  の内側の質量を  $m(r)$  とした。この方程式を真面目に解く前に、次元解析によって何がどの物理量にどう依存するか・するべきかを見る。星の質量を  $M$ 、半径を  $R$  とすると、星の典型的な密度は定義により  $\rho \sim M/R^3$  となるはずである。すると星の典型的な圧力、例えば中心での圧力は、静水圧平衡の式を変形することで

$$P \sim \frac{GM^2}{R^4} \quad (5)$$

と見積もることができる。実際、この議論に登場できる大局的な物理量は  $M$ ,  $R$  しかなく、物理定数も  $G$  以外は現れる余地がないので、(無視した定数倍を除き) この組み合わせしかありえないことはすぐにわかる\*2。一方、星を構成する物質の状態方程式として

$$P = K\rho^\Gamma \quad (6)$$

を仮定すると、合わせて

$$M \sim \left(\frac{K}{G}\right)^{1/(2-\Gamma)} R^{(4-3\Gamma)/(2-\Gamma)} \quad (7)$$

が導かれる。特に  $\Gamma = 4/3$  の物質では、 $M \sim (K/G)^{3/2}$  となり、質量は物質の性質  $K$  と重力の性質  $G$  とだけで一意に決まる。言い換えれば、 $\Gamma = 4/3$  の物質からなる星の質量は半径によらない、という意味で個性がなくなっており、逆に物理の対象としてはわかりやすい。

この  $\Gamma = 4/3$  を与える物質のひとつは、相対論的な縮退フェルミオンである。ここでは特に、太陽質量の8倍程度より軽い星が核融合の燃料を使い果たして(燃え尽きて)、自己重力を電子の縮退圧で支えるようになった「白色矮星」を考える。燃え尽きて温度がゼロと近似できるようになっても\*3、フェルミオンの全てが運動量ゼロに落ちることはできないため、縮退圧と呼ばれる圧力が生じる。Fermi-Dirac 統計を用いることで定量的に議論できるが、以下では物理量への依存性だけを見るためにやはり数係数を無視した解析を行う。電子の数密度を  $n_e$  とすると、電子間の典型的な距離は  $n_e^{-1/3}$  で与えられ、不確定性原理に基づけば電子は典型的に  $p \sim \hbar n_e^{1/3}$  程度の運動量を持つことがわかる。この運動量が電子の質量で決まる  $m_e c$  を超えた状態を相対論的縮退と呼び、そのときの圧力はエネルギー密度と同程度 ( $1/3$ ) となるので、 $P \sim c p n_e \sim \hbar c n_e^{4/3}$  が従う。この電子数密度を質量密度に結びつけるにあたり、白色矮星は中性子・陽子・電子の荷電中性な塊であり、質量はあくまで核子の質量で決まる。核子に占める陽子の割合を  $Y_e$  と書くことにすると、電子数密度は陽子数密度と同じなので  $n_e \approx \rho Y_e / m_p$  で与えられる。これを用いると相対論的な電子の圧力は結局

$$P \sim \hbar c \left(\frac{Y_e}{m_p}\right)^{4/3} \rho^{4/3} \quad (8)$$

で与えられることがわかり、確かに  $\Gamma = 4/3$  が実現されている\*4。

このときの質量を Chandrasekhar 質量と呼び、数係数を無視すれば

$$M_{\text{Ch}} \sim \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2} \frac{Y_e^2}{m_p^2} \quad (9)$$

で与えられる。白色矮星がどのような原子核でできているかは一意に決まるわけではないが、大抵の物質であれば陽子と中性子とはほとんど数が等しく  $Y_e \approx 0.5$  となっており、今の議論の水準では  $Y_e^2$  も数係数と考え

\*2 参考として、Buckingham の  $\Pi$  定理という数学的？ 背景もあるが、物理的な理解を与えるものとはまた違う気がする。

\*3 ここは本当は温度と比較する対象のフェルミエネルギーを求め、その比較を元にゼロ温度と近似していかどうか結論するのが筋である。

\*4 もっと直観的には、密度は相空間体積の  $p^3$  に比例し、圧力は相対論的粒子だと運動量  $p$  が光速  $c$  という一定速度で運ばれるために  $p^4$  にしか比例しないので、合わせると圧力は密度の  $4/3$  乗で与えられる。

て無視して構わないだろう。すると Chandrasekhar 質量は  $c, \hbar, G$  および核子質量  $m_p$  のみを用いて

$$M_{\text{Ch}} \sim \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{m_p^2} = \frac{m_{\text{pl}}^3}{m_p^2} \quad (10)$$

と書けることが結論できる。白色矮星自体には様々なものがあるがその質量には上限があり、それだけなら当たり前かもしれないが、それが ( $Y_e$  を通した組成への微妙な依存性を除き) Planck 質量と核子質量とで書けることが確認できた。このように、白色矮星は相対論・量子論・重力がわかりやすく交わる天体であると言える。他にも様々な天体に対して様々な議論ができるが、それについては冒頭の文献に譲る。

この議論で肝になったのは圧力勾配力と重力との兼ね合いであり、圧力はここで概観したように微視的物理の考察から導かれる。この講義では、微視的物理に立ち入ることはあまりせず (多分)、静水圧平衡を含めしかしそれにとどまらず重力が起こす巨視的現象を議論することを目標とする。

# 第 1 章

## 自己重力流体と自己重力系の性質

宇宙でガスなどの物質が集まり構造を形成する過程や、形成された構造の性質は流体近似の下で扱うことができることが多く\*1、また理解も容易である。まずは、自己重力の下で運動する流体の基礎方程式を導き、次いで自己重力流体の一般的な性質をいくつか紹介する。

この章の議論は

1. 観山正見, 二間瀬敏文, 野本憲一 編「天体物理学の基礎 I」(日本評論社) 3 章
2. 福江純, 和田桂一, 梅村雅之「宇宙流体力学の基礎」(日本評論社)
3. E. Poisson, C. M. Will “Gravity” (Cambridge University Press)

を参考にしている。他にも適切な教科書は多数あると思われる。

### 1.1 基礎方程式

自己重力流体の基礎方程式は、密度  $\rho(t, \mathbf{x})$ , 速度  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ , 圧力  $P(t, \mathbf{x})$ , 単位質量あたりの重力ポテンシャル  $\Phi(t, \mathbf{x})$  を用いて

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (1.1)$$

$$\partial_t \rho + \nabla_i (\rho v^i) = 0, \quad (1.2)$$

$$\partial_t (\rho v^i) + \nabla_j (\rho v^i v^j) = -\nabla^i P - \rho \nabla^i \Phi \quad (1.3)$$

で与えられる。ここで、 $\partial_t$  は時間での偏微分  $\partial/\partial t$  を、添字  $i, j \dots$  は直交座標  $x, y, z$  を指し、記号  $\nabla_i$  は  $i$  に対応する変数での偏微分を表すと思ってよい。曲線座標にした場合も、 $\nabla_i$  を平坦な計量に関する「共変微分」であると考えればこれらの式はそのまま成り立ち、有用でもあるが、ここではその議論は割愛する。

流体力学の議論においては、Euler 微分と Lagrange 微分との 2 種類の時間微分がそれぞれ有用になる。Euler 微分は空間の同じ位置で計算した時間微分で、これは取りも直さず時間偏微分  $\partial/\partial t \Big|_{\mathbf{x}}$  である。一方、運動する流体の微小部分、いわゆる流体素片に沿った微分というものも考えることができる。微小時間  $dt$  に流

---

\*1 考えている現象の時間スケールに対して構成要素の緩和時間が十分に短く、局所的に熱平衡が実現されている場合、連続体は流体として扱える。現象の時間スケールとしては系の特徴的な大きさ  $R$  を特徴的な巨視的速度  $V$ 、例えば脱出速度で割った力学的時間  $t_{\text{dyn}} = R/V$  を用いるのが妥当であろう。一方、系の緩和時間は考える粒子の数密度  $n$ 、衝突断面積  $\sigma$  および微視的速度  $v$  を用いて衝突時間  $t_{\text{col}} = 1/(n\sigma v)$  とするのが妥当であろう。磁場が存在すると荷電粒子が閉じ込められ、実効的な力学的時間が長くなるため、単純な見積りよりも流体近似が成り立ちやすくなることは言及に値する。

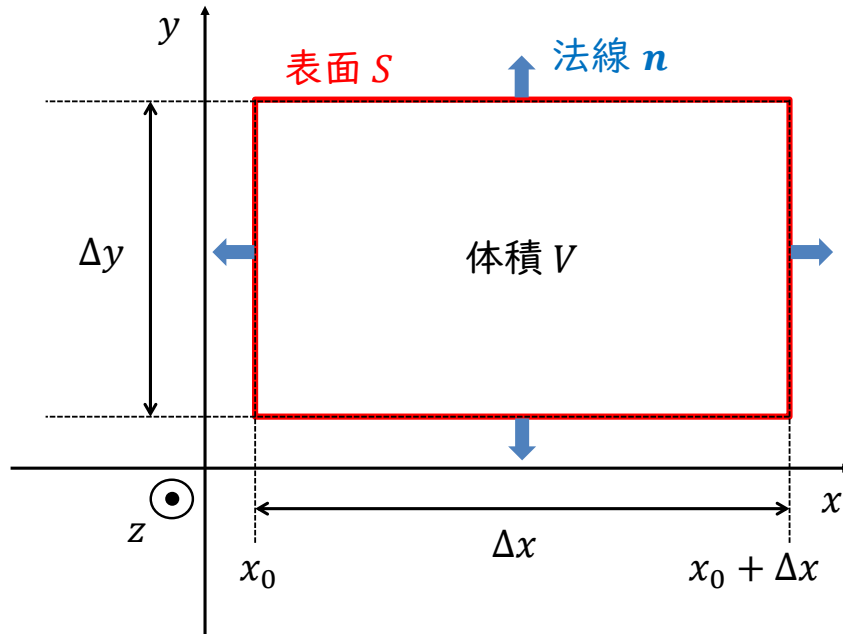


図 1.1 流体力学の基礎方程式を保存則に基づいて導く際の概念図。

体素片は  $d\mathbf{x} = \mathbf{v} dt$  だけ移動するので、流体素片が感じる何らかの場  $f(t, \mathbf{x})$  は同じく微小時間  $dt$  に

$$f(t + dt, \mathbf{x} + \mathbf{v} dt) - f(t, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial f}{\partial t} dt + (\nabla f) \cdot (\mathbf{v} dt) + \mathcal{O}(dt^2) - f(t, \mathbf{x}) \quad (1.4)$$

$$\approx \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) f dt \quad (1.5)$$

$$=: \frac{df}{dt} dt \quad (1.6)$$

だけ変化する。この最後で定義された  $df/dt$  を Lagrange 微分と呼ぶ。他にも物質微分と呼ばれたり、また記号として  $D/Dt$  で表されることもある。

以下では、各々の方程式を保存則に基づいて導出する。図 1.1 も適宜参照のこと。

### 1.1.1 重力ポテンシャルの Poisson 方程式

まず重力ポテンシャルが満たす Poisson 方程式を導く。この節では一定時刻に着目した話しかしないので、引数の  $t$  は全て省略する。なお、考えている系における質量分布を、デルタ関数も含めて密度分布で表すことさえできればこの節の議論は全て適用でき、流体近似とは無関係に成り立つ。

質点の場合、ある点  $\mathbf{x}_0$  にある質量  $m_0$  は他の点  $\mathbf{x}$  にある質量  $m$  に対して重力  $-Gmm_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)/|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3$  を及ぼすことはよく知られている。重力はポテンシャルで書くこともでき、力を受ける側の情報を取り除いて単位質量あたりにすると

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{Gm_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \quad (1.7)$$

が質量  $m_0$  の作る単位質量あたりの重力ポテンシャルである。以降、「単位質量あたりの」という説明は省き、重力ポテンシャルをそもそもそのように定義する。



この質点が密度  $\rho(\mathbf{x}_0)$  を持つ微小体積  $dV$  の流体素片（流体でない場合は微小質量と呼べばよい）であったとしよう。その質量は  $dm := \rho(\mathbf{x}_0) dV$  で与えられ、重力ポテンシャルに対しては

$$d\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{G\rho(\mathbf{x}_0) dV}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \quad (1.8)$$

だけの寄与をする。このような流体素片が広がった系を考えるのであれば、全質量が作る重力ポテンシャルは系全体で積分することにより

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (1.9)$$

と導かれる。ここで特定の点に関する議論でないという気持ちを込め、積分変数は  $\mathbf{x}_0$  から  $\mathbf{x}'$  に置き換えた。ここからわかる重力ポテンシャルの特徴として、空間上の一点での値を求めるために、同一時刻・全空間での密度分布が必要になる。これは Newton 重力の非局所性を表している。

積分のままでは何かと扱いづらいので、重力ポテンシャルが満たす微分方程式も導いておく。電磁気学などで既知であろう、Laplacian の Green 関数

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right) = -\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (1.10)$$

を用いれば\*2

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}) = 4\pi G \int \rho(\mathbf{x}') \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3x' \quad (1.11)$$

$$= 4\pi G \rho(\mathbf{x}) \quad (1.12)$$

が得られる。この式を見ると左辺も右辺も  $\mathbf{x}$  での値にしか依存していないので、一見すると局所的に重力ポテンシャルが決まっているように見えるかもしれない。しかしこの方程式を解くには、例えば無限遠で重力ポテンシャルが消え  $\Phi(|\mathbf{x}| \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  となるなど、境界条件を与えなければならない。この事実をもって、Poisson 方程式で支配される場は一般に非局所的なものと解される。

例えば宇宙全体で起こる重力現象を Newton 重力で考えようとする、境界条件を介して無限遠での情報を与えなければならないが、宇宙に果てがあるかもわからない我々には適切な境界条件を知るべくもない。このような大規模な問題を考えるにあたっては、一般相対論から議論を始めることが妥当であろう。一方、天体現象を考える場合の多くでは、無限遠といっても考えたい天体から十分離れた点を近似的に無限遠と考えているに過ぎないので\*3、Poisson 方程式に境界条件を課すことも正当化される。しかし後で見るように、無限に広がった媒質などを考える際はやはりいくぶん無理が生じる。

## 1.1.2 連続の式

流体力学で言う連続の式は質量保存則から導かれる。例えば図 1.1 を参考に、空間に固定された体積  $V$  の中の質量の時間変化を考えよう。この体積の中の質量は

$$M(t) = \int_V \rho(t, \mathbf{x}) dV \quad (1.13)$$

\*2 納得するには (i)  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$  では安直に計算すればよく 0 になること、(ii)  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  ではその周りを囲む半径  $\epsilon$  の球で積分して Gauss の法則を用いると  $-1$  が得られること、を見ればよい。導出するには Fourier 変換して微分を掛け算に変えてから逆変換する。

\*3 一般相対論でも孤立系を考える際は同様に扱い、漸近的平坦な時空と呼ばれる時空は宇宙論的スケールの現象から切り離された孤立系のモデルにあたる。

なので、その単位時間あたりの変化、端的に時間微分は各点での密度の時間変化を足し上げればよく

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(t, \mathbf{x}) dV, \quad (1.14)$$

$$= \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (1.15)$$

で与えられる。さて質量が時間変化するのは、勝手に空間のどこかから質量が生まれたり逆に消えたりしない限り、流体が表面を通して体積  $V$  に入出入りするからである。単位時間あたりに体積  $V$  に入ってくる質量は、表面の法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を用いれば

$$\frac{dM}{dt} = - \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.16)$$

と表面  $S$  での面積分で与えられる。内積になるのは、表面での速度のうち表面に沿って流れているだけの成分は、内部の質量の増減に寄与しないことから理解できよう。負符号が付くのは、 $\mathbf{v}$  が  $\mathbf{n}$  の方向を向いていると外に出て行って質量が減ることから理解できる。この表面積分は Gauss の法則によって体積積分に書き換えることができ、(1.15) 式と (1.16) 式とが等しいことを用いれば

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0 \quad (1.17)$$

が従い、さらに体積は任意だったことを考えれば無限小体積でもこれが成り立つので連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.18)$$

を得る。また、添字を用いて書けば

$$\partial_t \rho + \nabla_i (\rho v^i) = 0 \quad (1.19)$$

とできる。

Lagrange 微分を用いて連続の式を書くと

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.20)$$

となる。流体素片の密度が変化しない非圧縮性流体の場合、この式は  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  を導く。天体现象を考える場合、一般論として非圧縮性流体による近似を展開してもそこまで有用でないように思われるため、ここでは深入りしない。

ここで導いた連続の式は質量保存則を元にしたものだったが、一般には様々な量が保存して、一般的な意味での連続の式を満たす。代表的なものは量子力学での確率の保存であろう。何らかの密度  $q$  および流束  $\mathbf{j}$  が存在し、それらが

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (1.21)$$

という一般的な連続の式を満たしており、考えている系に入出入りがなく十分外側で  $\mathbf{j}$  が消えれば（無限遠であれば十分早く 0 に近づけば）

$$Q := \int q dV \quad (1.22)$$

が保存する。証明は先の変形とほぼ同じで、 $\mathbf{j} = 0$  となる表面  $S$  を用いて

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V q dV = \int_V \frac{\partial q}{\partial t} dV \quad (1.23)$$

$$= - \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV \quad (1.24)$$

$$= - \oint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (1.25)$$

とすればよい。流体力学の連続の式では  $q$  は  $\rho$  に、 $\mathbf{j}$  は  $\rho\mathbf{v}$  に対応し、 $Q$  は系の全質量を導く。このような形の方程式を保存形の式と呼ぶ。さらに一般化して、源泉項  $\sigma$  も用いて

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = \sigma \quad (1.26)$$

と書かれる場合も、広く保存形の式と呼ばれる。この形は特に数値計算において保存量が保存することを機械精度で保証するために有益であり、また衝撃波のような本質的に不連続で微分方程式が成り立たないはずの点を扱うためにも有用である。流体力学としては保存形の式を複数連立した系が基礎方程式をなしていることが多く、源泉項は通常、いずれの密度  $q$  の微分も含まないものを指す（と著者は理解している）。

### 1.1.3 Euler 方程式

流体の運動方程式にあたるのは、運動量保存則から導かれる Euler 方程式である。粘性がある場合は Navier-Stokes 方程式が用いられるが、天体现象において分子粘性などの微視的な粘性が重要になる場合は稀であり、Euler 方程式での議論が十分な場合は多い。といっても天体现象においてあらゆる粘性が重要でないということではなく、それどころか降着円盤などの議論において乱流が引き起こす実効粘性は本質的に重要である。粘性の議論が必要になることがあれば改めて行うこととして、ひとまず粘性を無視して進める。

ここでは簡単のために運動量の  $x$  成分に着目して方程式を導出し、それを全成分に拡張する手順をとる。体積  $V$  内の運動量は運動量密度  $\rho\mathbf{v}$  の積分で与えられ、その  $x$  成分の時間変化は

$$\frac{dP^x}{dt} = \int_V \frac{\partial(\rho v^x)}{\partial t} dV \quad (1.27)$$

となる。圧力も運動量も同じ  $P$  を用いているが、添字の有無で区別可能なこと、最終的には運動量を用いずに書き下すことから、一時的に許容されたい。これを変化させる要因としては、まず質量保存則の場合と同様に、表面  $S$  を通って流体が運ぶ運動量

$$\left( \frac{dP^x}{dt} \right)_{\text{flow}} = - \oint_S \rho v^x \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.28)$$

$$= - \int_V \nabla \cdot (\rho v^x \mathbf{v}) dV \quad (1.29)$$

がある。次に、体積  $V$  の外側の圧力で押される力の合算が符号も考えて  $\oint_S P(-\mathbf{n}) dS$  であることから、 $x$  方向の運動量はその方向の単位ベクトルを  $\mathbf{e}_x$  として

$$\left( \frac{dP^x}{dt} \right)_{\text{pres}} = - \oint_S P \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.30)$$

$$= - \int_V \nabla \cdot (P \mathbf{e}_x) dV \quad (1.31)$$

$$= - \int_V \frac{\partial P}{\partial x} dV \quad (1.32)$$

だけ時間変化する。図 1.1 に示された直方体（図の上では  $z$  方向が省略されているので長方形）に則って説明しておく、圧力に伴う力の  $x$  成分は左右にある  $x = x_0$  および  $x = x_0 + \Delta x$  の面でそれぞれ正方向、負方

向に生じている。力は圧力に面積をかけたものなので、両者を合わせると

$$[P(x_0) - P(x_0 + \Delta x)]\Delta y\Delta z \approx -\frac{\partial P}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z \quad (1.33)$$

となる。この左辺・右辺がそれぞれ表面積分・体積積分へと一般化されているのが先の式である。最後に、外力も運動量変化を引き起こす。外力の素性を特定せず単位質量あたりに力  $\mathbf{f}$  が働くとした場合、これが重力ポテンシャル  $\Phi$  で与えられるとした場合の表式はそれぞれ

$$\left(\frac{\partial P^x}{\partial t}\right)_{\text{ext}} = \int_V \rho f^x dV \quad (1.34)$$

$$= -\int_V \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x} dV \quad (1.35)$$

となる。以上の寄与を全て合わせ、無限小体積で考えれば、添字による記法を用いて

$$\partial_t(\rho v^i) + \nabla_j(\rho v^i v^j) = -\nabla^i P - \rho \nabla^i \Phi \quad (1.36)$$

を得る。これが<sup>4</sup>(部分的に)保存形の Euler 方程式である。直交座標を用いる場合、添字の上下に意味はないことを確認しておく。右辺に残った項も左辺の  $\nabla_j$  の下に移してより本来的な意味での保存形に書き換えることができるので、本節の最後でそれを見る<sup>\*4</sup>。

Euler 方程式については、Lagrange 微分で書き換えた非保存形もしばしば用いられ、また質点との対比が容易である点では保存形よりも直観的といえる。(1.36) 式の左辺を変形すると

$$v^i [\partial_t \rho + \nabla_j(\rho v^j)] + \rho(\partial_t v^i + v^j \nabla_j v^i)$$

となるが、この第一項は連続の式を用いれば消える。第二項は Lagrange 微分を用いて書き換えることができ、ベクトル解析の表式にすると

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi \quad (1.38)$$

を得る。圧力勾配力がなければ通常の万有引力下における質点の運動方程式になっており、逆に言えば圧力勾配力の存在が流体の振る舞いとして特徴的であることを示している。事実、後で見るように、自己重力流体の関係する現象においては、圧力勾配力と重力とのせめぎ合いが重要な働きをしている(と理解できる)ことが大半である。

自己重力流体では、Euler 方程式を右辺が 0 という意味での完全な保存形に書き換えられることも確認しておこう。力として流体が流体自身に及ぼす圧力および自己重力しか現れていないことから、運動量保存則である Euler 方程式を右辺が 0 という意味での保存形に書けること自体は、作用反作用の法則から当然予想できる。Euler 方程式の右辺のうち、圧力勾配項は  $\delta_{ij}$  を用いて  $\nabla_j(P\delta^{ij})$  の形に書き換えられ、この変形は自己重力と無関係に頻繁になされる。外力がない場合、しばしば  $\pi^{ij} := \rho v^i v^j + P\delta^{ij}$  を運動量流束テンソルや応力テンソルと呼び、Euler 方程式は  $\partial_t \rho + \nabla_j \pi^{ij} = 0$  という保存形にまとめられる。重力項については、Poisson 方程式を用いることで

$$\rho \nabla^i \Phi = \frac{1}{4\pi G} (\nabla^2 \Phi) (\nabla^i \Phi) \quad (1.39)$$

<sup>\*4</sup> これをベクトル解析の表式で書こうとすれば、テンソル積を用いて

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\nabla P - \rho \nabla \Phi \quad (1.37)$$

などとするのが一般的だと思われる。しかしここまで来ると、もはや添字記法より優先するほどの利点はないように感じられる。

$$= \frac{1}{4\pi G} \nabla_j \left[ (\nabla^i \Phi)(\nabla^j \Phi) - \frac{1}{2} \delta^{ij} \delta^{kl} (\nabla_k \Phi)(\nabla_l \Phi) \right] \quad (1.40)$$

と書き換えられる。これらをまとめて、自己重力流体の Euler 方程式は

$$\partial_t(\rho v^i) + \nabla_j \left\{ \rho v^i v^j + P \delta^{ij} + \frac{1}{4\pi G} \left[ (\nabla^i \Phi)(\nabla^j \Phi) - \frac{1}{2} \delta^{ij} \delta^{kl} (\nabla_k \Phi)(\nabla_l \Phi) \right] \right\} = 0 \quad (1.41)$$

という保存形に書き直せる。連続の式で行なった議論の繰り返しになるが、この形に表しておく、数値計算において運動量が機械精度で保存することを保証できるなど、実用上の利点もある。ただし、Euler 方程式を導出した段階では重力やそのポテンシャルがどう決まるかを問わない一般的な式であったのに対し、この形に書き換える際は力を定める法則である Newton 重力の Poisson 方程式が用いられており、本質的に重力理論に依拠していることは注記に値する<sup>\*5</sup>。

#### 1.1.4 エネルギー方程式

後述するようにこの講義ではあまり用いることもないと思うが、エネルギーの時間発展を与えるエネルギー方程式<sup>\*6</sup>も紹介しておく。全エネルギー密度を  $e_{\text{tot}}$  とすると、その時間変化は流体の出入りによる分に加え、考えている体積の表面での圧力による仕事、外力による仕事  $\mathbf{v} \cdot (\rho \mathbf{f})$  で与えられる。圧力による仕事は、例えば図 1.1 で再び  $x$  方向を考えると

$$[P(x)v^x(x) - P(x + \Delta x)v^x(x + \Delta x)]\Delta y \Delta z \approx -\frac{\partial(Pv^x)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.42)$$

と与えられ、これを体積積分に直すと  $-\nabla \cdot (P\mathbf{v})$  なる寄与を得る。外力は重力であるとして、さらにここでは様々な加熱や冷却の過程も（手で加えて）考慮すると、全エネルギー密度の時間発展は

$$\partial_t e_{\text{tot}} + \nabla_i (e_{\text{tot}} v^i) = -\nabla_i (P v^i) - \rho v^i \nabla_i \Phi + \rho(\varepsilon_+ - \varepsilon_-) \quad (1.43)$$

と与えられる。現実的にエネルギーの時間発展を考える必要がある場合は、放射による冷却や核反応による加熱、また粘性による加熱などが出てくる場合が主である。それらを加味するために単位質量あたりの加熱率・冷却率をそれぞれ  $\varepsilon_+$ ,  $\varepsilon_-$  と表したのが上の式である。

全エネルギー密度を分類するに、 $\varepsilon$  を単位質量あたりの内部エネルギーとすれば、流体の運動エネルギー密度および内部エネルギー密度によって

$$e_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon \quad (1.44)$$

と表される。これらの時間発展は各々導くことができ、それを合わせて上記の全エネルギーに対する発展方程式を得ることもできる。まず運動エネルギーの時間変化は Euler 方程式から、例えば保存形と非保存形とを組み合わせることで

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \nabla_i \left( \frac{1}{2} \rho v^2 v^i \right) = -v^i \nabla_i P - \rho v^i \nabla_i \Phi \quad (1.45)$$

と導かれる。次に内部エネルギーは、熱流のない理想気体では熱力学第一法則が  $dU = -P dV$  となることから、これを質量あたりに直してさらに微小変化を流体に沿った変化である Lagrange 微分に対応させることで

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -P \frac{d(1/\rho)}{dt} \quad (1.46)$$

<sup>\*5</sup> 非相対論的な状況下で Newton 重力の正しさに疑義が呈されることは稀ではある。一方、時空の性質を示す上で Einstein 方程式を使う議論は一般相対論に依拠している、などの意味では特定の重力理論を用いたかもしばしば注目される。

<sup>\*6</sup> この呼び名は必ずしも一般的ではないように思う。

$$= \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (1.47)$$

$$= -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (1.48)$$

を導く。ただし最後の変形では、Lagrange 微分で表した連続の式を用いた。加熱や放射の効果を付け加え、連続の式と組み合わせて Euler 微分で書き換えれば

$$\partial_t(\rho\varepsilon) + \nabla_i(\rho\varepsilon v^i) = -P\nabla_i v^i + \rho(\varepsilon_+ - \varepsilon_-) \quad (1.49)$$

を得る。これら 2 つ合わせたものが全エネルギー密度  $e_{\text{tot}}$  の発展方程式と一致していることは容易に確かめられる。

少なくとも状況において、物理的な考察から断熱進化や等温進化を高い精度で仮定できる。その場合はエネルギーの時間発展を解くことなく、次節で議論する状態方程式において密度さえ与えれば圧力を定めることができる。この講義でも、重力現象自体の理解に必要なと思われる限りにおいて、エネルギーの時間発展を陽に扱うことなく、状況に応じて物質の性質やその発展を仮定して済ませることとする。

### 1.1.5 状態方程式

圧力は以上の基礎方程式では定まらず、物質の個性を反映した状態方程式によって与えられる。一成分流体の場合、圧力は他の 2 つの熱力学量の関数として与えられ、例えば密度および内部エネルギーを引数に

$$P = P(\rho, \varepsilon) \quad (1.50)$$

を状態方程式とすることがしばしば行われる。特に圧力が内部エネルギー密度にしか依存せず、比熱比  $\gamma$  を用いて

$$P = (\gamma - 1)\rho\varepsilon \quad (1.51)$$

とできるものを理想気体と呼ぶ。電子とイオンとのプラズマなど多成分流体は宇宙に遍く存在し、そのような場合は引数として物質の組成を指定することもしばしば必要となるが、この講義では扱わない予定である。なお、エントロピーを固定して圧力を密度で微分した量から

$$c_s^2 := \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_s \quad (1.52)$$

と、音速  $c_s$  が定義される。これは次章で音波通過時間を議論する際に改めて導出する。

通常の原子や分子からなる気体では、その質量を  $m$  としたときに密度および温度  $T$  を用いて  $P = (\rho/m)k_B T$  が理想気体の状態方程式を与える。加熱ないし冷却の過程によって一定の温度に保たれる場合は\*7、近似的に等温過程が実現され、圧力は密度に比例するとみなせる。この場合は等温音速を  $c_{s,i}^2 = k_B T/m$  で定義することがしばしば行われる。この講義では、考えている状況は都度確認することにして、等温音速なども一律に  $c_s$  と表す。

断熱過程の場合、熱力学第一法則  $dU = -P dV$  は質量で割ることで

$$d\varepsilon = \frac{P}{\rho^2} d\rho \quad (1.53)$$

\*7 例えば、ある温度を境に急激に放射効率が変化する過程が冷却に寄与する場合などに実現する。

を導く。ここに理想気体の状態方程式を用いると、積分定数  $K$  を用いて

$$\varepsilon = \frac{K}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1}, \quad (1.54)$$

$$P = K\rho^\gamma \quad (1.55)$$

の形に書き換えることができる。断熱過程に限らずとも、後者のように圧力が密度の冪乗で

$$P = K\rho^\Gamma \quad (1.56)$$

と定まる状況はしばしば実現する。そのときのこの関係式をポリトロープと呼び、 $\Gamma$  は実効的な比熱比  $\gamma_{\text{eff}}$  と解釈される。例えば等温過程は  $K = c_s^2$ ,  $\Gamma = 1$  のポリトロープに帰着する。物質の微視的性質のみによって決まるものではないので適切な呼び方ではないが、結果として成り立ったポリトロープも含めてポリトロープ状態方程式と呼ばれることもある。

### 1.1.6 「共変的」な基礎方程式の記述

最後に、今の非相対論的な枠組みでは形式的な書き換えに過ぎないが、連続の式と Euler 方程式とを組み合わせるとあたかも時空の上で成り立つ一組の式のように書けることを紹介する。そのために「質量運動量テンソル」\*8を

$$T^{tt} = \rho, \quad (1.57)$$

$$T^{ti} = \rho v^i, \quad (1.58)$$

$$T^{ij} = \rho v^i v^j + P\delta^{ij} + \frac{1}{4\pi G} \left[ (\nabla^i \Phi)(\nabla^j \Phi) - \frac{1}{2} \delta^{ij} \delta^{kl} (\nabla_k \Phi)(\nabla_l \Phi) \right] \quad (1.59)$$

によって導入する。時間偏微分を  $\nabla_t = \partial_t$  とも書くことにし、 $t$  および空間の添字  $x, y, z$  をギリシャ文字  $\alpha, \beta$  でまとめて表したとき、連続の式および完全な保存形で表した Euler 方程式は

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \quad (1.60)$$

と、あたかも時空での 4 元的な式であるかのような形にまとめられる。繰り返し、これはあくまで形式的な変形であったが、一般相対論の Newton 極限において (局所的) エネルギー運動量保存則がこの式を導出することが確かめられる。極限を取る前の微分演算子  $\nabla_\alpha$  は、時空の計量に付随する共変微分となっている。

## 1.2 ビリアル定理

エネルギーや運動量の保存則のように、系の詳細によらず一般に成り立つ性質を把握しておくことは有用である。その代表例として、ここではビリアル定理を示す。頻りに議論されるのはスカラーのビリアル定理、特にその定常状態でのものである。しかしここではより一般的に、四重極モーメントテンソル

$$Q^{ij} := \int \rho x^i x^j d^3x \quad (1.61)$$

の時間二階微分が運動エネルギーテンソル

$$T^{ij} := \frac{1}{2} \int \rho v^i v^j d^3x, \quad (1.62)$$

\*8 こういう名前でも広く呼ばれているわけではない。エネルギー運動量テンソルが念頭にある。

重力ポテンシャルエネルギーテンソル

$$W^{ij} := -\frac{G}{2} \int \int \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \frac{(x-x')^i(x-x')^j}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} d^3x d^3x', \quad (1.63)$$

圧力積分

$$\Pi := \int P d^3x \quad (1.64)$$

を用いて

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 Q^{ij}}{dt^2} = 2T^{ij} + W^{ij} + \Pi \delta^{ij} \quad (1.65)$$

と表されるというテンソルのビリアル定理を導出し、そこからスカラーのビリアル定理を得る。

質点の力学で運動方程式に位置をかけて長時間平均するとビリアル定理を得るのと同様、Euler 方程式に位置をかけて積分することで流体に関するテンソルのビリアル定理を導くことができる。素直に Euler 方程式に位置をかけて積分してもよいが、ここでは四重極モーメントテンソルを直接微分して示すことにする。そのためにも、一般の物理量  $f(t, \mathbf{x})$  に密度をかけ、流体全体を含む領域で積分した量の時間微分が

$$\frac{d}{dt} \int \rho(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) d^3x = \int \left( \rho \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} f \right) d^3x \quad (1.66)$$

$$= \int \rho \frac{\partial f}{\partial t} d^3x - \int \nabla_i (\rho v^i) f d^3x \quad (1.67)$$

$$= \int \rho \left( \frac{\partial f}{\partial t} + v^i \nabla_i f \right) d^3x - \oint \rho v^i f dS_i \quad (1.68)$$

$$= \int \rho \frac{df}{dt} d^3x \quad (1.69)$$

と書けることを確認する。表面積分は密度が 0 となる遠方領域で評価することで落とした。この関係式により、四重極モーメントの一階微分は

$$\frac{dQ^{ij}}{dt} = \int \rho \frac{d}{dt} (x^i x^j) d^3x \quad (1.70)$$

$$= \int \rho (x^i v^j + v^i x^j) d^3x \quad (1.71)$$

を、二階微分は Euler 方程式を用いて

$$\frac{d^2 Q^{ij}}{dt^2} = 2 \int \rho v^i v^j d^3x + \int \rho \left( x^i \frac{dv^j}{dt} + x^j \frac{dv^i}{dt} \right) d^3x \quad (1.72)$$

$$= 2 \int \rho v^i v^j d^3x - \int (x^i \nabla^j P + x^j \nabla^i P) d^3x - \int \rho (x^i \nabla^j \Phi + x^j \nabla^i \Phi) d^3x \quad (1.73)$$

を導く。このうち第一項は  $4T^{ij}$  にほかならない。第二項は部分積分によって\*9

$$- \int (x^i \nabla^j P + x^j \nabla^i P) d^3x = 2\delta^{ij} \int P d^3x - \oint P x^i dS^j - \oint P x^j dS^i \quad (1.75)$$

\*9 例えば任意の定数ベクトル  $V_i, W_j$  を作用させて通常の Gauss の定理に帰着させると

$$- \oint V_i W_j P (x^i dS^j + x^j dS^i) \quad (1.74)$$

が得られるので、任意のベクトルであったことを用いて  $V_i, W_j$  を外せばよい。



と変形できる。外部の圧力は十分に低く、表面項は無視できるとすれば、残った項は  $2\Pi\delta^{ij}$  となる。無視できない場合は後で別途議論する。第三項については、重力ポテンシャルを Green 関数を用いた表式に表すことで

$$-\int \rho(x^i \nabla^j + x^j \nabla^i) \Phi d^3x = G \int \rho(\mathbf{x})(x^i \nabla^j + x^j \nabla^i) \left( \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \right) d^3x \quad (1.76)$$

$$= -G \int \int \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \frac{x^i(x-x')^j + x^j(x-x')^i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x d^3x' \quad (1.77)$$

$$= -G \int \int \rho(\mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}) \frac{x'^i(x'-x)^j + x'^j(x'-x)^i}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} d^3x' d^3x \quad (1.78)$$

$$= -G \int \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \frac{(x-x')^i(x-x')^j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x d^3x' \quad (1.79)$$

とでき、これは  $2W^{ij}$  である。この変形において第二行・第三行は  $x^i$  と  $x'^i$  とを入れ替えただけの式で同じものであり、第四行ではこれらを足して半分になっている。微分演算子  $\nabla_i$  は  $\mathbf{x}$  を微分するが  $\mathbf{x}'$  は微分しないことに注意すること。これらをまとめると

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 Q^{ij}}{dt^2} = 2T^{ij} + W^{ij} + \Pi \delta^{ij} \quad (1.80)$$

となり、テンソルのピリアル定理が示された。

この式のトレースをとると、 $Q = \int \rho r^2 d^3x$  に対して運動エネルギー  $T$  および重力ポテンシャルエネルギー  $W$  を用いた

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 Q}{dt^2} = 2T + W + 3\Pi \quad (1.81)$$

なるスカラーのピリアル定理が導かれ、特に時間変化しない定常状態は

$$2T + W + 3\Pi = 0 \quad (1.82)$$

を満たす。トレースをとった

$$T = \frac{1}{2} \int \rho v^2 d^3x \quad (1.83)$$

が運動エネルギーであることには疑いがないであろうが、

$$W = -\frac{G}{2} \int \int \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x d^3x' \quad (1.84)$$

が重力ポテンシャルエネルギーであることを理解する上では、同じ流体素片の組によるポテンシャルエネルギーへの寄与を2回重複して数えるのを避けるため、全体に  $1/2$  がかかっていると見ればよい。さらに全体が比熱比  $\gamma$  の理想気体からなる場合、全内部エネルギー

$$U := \int \rho \varepsilon d^3x \quad (1.85)$$

を用いて、特に定常な場合にはスカラーのピリアル定理を

$$2T + W + 3(\gamma - 1)U = 0 \quad (1.86)$$

と表すことができる。

### 1.2.1 負の比熱

簡単のため巨視的な運動エネルギーの無視できる系が、放射などによってエネルギーを失いつつ準静的に進化する場合を考える。準静進化であれば、定常下のビリアル定理

$$W + 3(\gamma - 1)U = 0 \quad (1.87)$$

は常に近似的に成り立つと考えられ、一方で全エネルギーは定義により

$$E = W + U \quad (1.88)$$

で与えられる。ここから重力ポテンシャルエネルギーを消去すると

$$U = -\frac{E}{3\gamma - 4} \quad (1.89)$$

となる。この表式から、系が例えば光を放射してエネルギーを失うと、構成する物質が  $\gamma > 4/3$  を満たすものであれば内部エネルギーはむしろ増加することがわかる。単原子理想気体を筆頭に、この比熱比への条件はごくごく容易に満たされるものであり、次章で見るように流体が平衡形状を持てるための条件にすらなっている。通常、内部エネルギーは温度の増加関数なので、全エネルギーの損失に伴って温度も増加する。エネルギーを失ったときに温度はむしろ上がることは、系の比熱が負であると言い換えられ、これは自己重力系の特徴的な性質である。内部エネルギーを上げるエネルギーの供給源はもちろん重力エネルギー

$$W = \frac{3(\gamma - 1)}{3\gamma - 4}E \quad (1.90)$$

の解放である。

例えば星が水素の核融合などで燃えているとき、比熱が正であったならば光でエネルギーを失ったとき温度は下がり、核融合の効率も下がって重力に押し切られ、一方的に潰れ続けるはずである。星が安定に燃え続けて自己の形状を保てるのは、負の比熱に帰するところ大といえよう。同様に、ひとたび水素などの核燃料を燃やし尽くして潰れ始めても、比熱が負であるために残余エネルギーの放射に伴い温度は上昇し、ヘリウムなど次の核融合に火を付けて再び崩壊に抗することができるようになる。他にも流体力学に限らない様々な局面で、比熱が負であることによる特徴的な現象が起きるのが自己重力系の面白さの一つであろう。

### 1.2.2 外部圧力の影響

考えている系の外部の圧力  $P_{\text{ext}}$  が無視できない場合は、(1.75) 式の表面項を落とすことができない。この項を外部圧力の一定面で積分し体積積分に直すと、面内の体積を  $V$  としてテンソルビリアル定理は

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 Q^{ij}}{dt^2} = 2T^{ij} + W^{ij} + \Pi \delta^{ij} - P_{\text{ext}} V \delta^{ij} \quad (1.91)$$

に変更される。これを変形すると、定常時のスカラービリアル定理は

$$2T + W + 3\Pi = 3P_{\text{ext}}V \quad (1.92)$$

となる。重力や巨視的運動を考えず  $P_{\text{ext}}V = \Pi$  となる場合、流体が一様で等温なら Boyle の法則に対応し、この観点から外圧下のビリアル定理を実在気体の状態方程式とみなすこともできる。この関係式は後で等温球を考える際に有用になる。

## 第 2 章

# 重力不安定による構造形成

天体のような巨視的構造は、星間物質などの広がった物質が重力崩壊によって凝集することで形成される。物質が集まれば呼応して重力も強くなり、天体も容易に構成されるように思えるかもしれないが、同時に圧力も上がるため、重力崩壊が有意に進まないうちに妨げられる場合も十分ありうる。宇宙の平均密度  $10^{-29} \text{ g cm}^{-3}$  に対し、銀河の典型的な密度は  $10^{-23} \text{ g cm}^{-3}$ 、星では  $1 \text{ g cm}^{-3}$  程度なので、天体の形成は文字通り桁違いの圧縮を要求する。そのため、圧力に妨げられずに重力崩壊が進むことは、構造を形成する上で実質的に必須と言える。さらに、そもそもどのような領域が重力崩壊に対して不安定かも自明ではなく、その条件を知ることは形成される天体の質量やサイズを知る上でも重要である。以下ではこれらの要素を論じる。

この章の議論は

1. 観山正見, 二間瀬敏文, 野本憲一 編「天体物理学の基礎 I」(日本評論社) 3 章
2. 福江純, 和田桂一, 梅村雅之「宇宙流体力学の基礎」(日本評論社)

を参考にしている。

### 2.1 天体現象の時間スケール

自己重力流体が起こす様々な現象を理解する上で、主に 2 つの時間スケールが重要となる\*1。ここではそれらを紹介しつつ、付随して音波および音速を導出する。これは摂動による解析の代表的な例でもある。

#### 2.1.1 自由落下時間 (free fall time)

重力崩壊など重力的な現象を特徴づける時間スケールは、次元解析により  $\sim 1/\sqrt{G\rho}$  で与えられることが期待される。事実、質量  $M$ 、系のサイズ  $R$ 、万有引力定数  $G$  から作れる時間の次元を持った量は、定数倍を除きこれが唯一である。もう少し具体的には、密度  $\rho$  の球体の半径  $R$  の表面での加速度が  $a = GM/R^2 = 4\pi G\rho R/3$  で与えられるので、落下にかかる特徴的な時間が  $\approx \sqrt{R/a} = \sqrt{3/(4\pi G\rho)}$  と見積もられることから理解できる。

定量的な解析の例として、一様密度  $\rho$  で圧力のない物質を静止させて半径  $R$  の球対称形状に用意したとき、

---

\*1 著者が他分野に疎いだけかもしれないが、時間スケールを軸にした議論は物理の中でも宇宙物理において顕著に重要であるように思う。

重力崩壊するまでの時間がまさにこの形に与えられる。球の質量

$$M = \frac{4\pi\rho}{3}R^3 \quad (2.1)$$

を用いると、この球の表面の運動方程式は

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \quad (2.2)$$

となる。通常通り  $dr/dt$  をかけて積分すればエネルギー保存則が導かれ、運動の方向も考慮すれば

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)} \quad (2.3)$$

が従う。これを变形すると

$$\sqrt{\frac{2GM}{R}} dt = -\frac{2r}{R} \frac{dr}{\sqrt{1 - (2r/R - 1)^2}} \quad (2.4)$$

を得るので、0 から  $\pi$  までの範囲を取る変数  $\eta$  を用いて\*2

$$\cos \eta := \frac{2r}{R} - 1 \quad (2.5)$$

と置くと右辺は  $r d\eta$  になり、パラメータ表示による解

$$r = \frac{R}{2}(1 + \cos \eta), \quad (2.6)$$

$$t = \sqrt{\frac{R^3}{8GM}}(\eta + \sin \eta) \quad (2.7)$$

が得られる。重力崩壊の時刻を  $r = 0$  となる  $\eta = \pi$  で定義すると、この時刻は密度を用いて

$$t_{\text{ff}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}} \quad (2.8)$$

と求まり、次元解析の結果を再現する。一般にこの時間スケールを自由落下時間 (free-fall time) と呼び、圧力なし・一様密度・球対称などの条件が外れた場合にも特徴的な時間スケールとして用いられる。係数はあまり大きくなく一般の場合には厳密でないので、時間スケールの見積もりには次元解析の通りに  $1/\sqrt{G\rho}$  としても問題ない。

## 2.1.2 音波通過時間 (sound crossing time)

まず流体の音波とは何か、また音速とは何かを理解するため、一様で静止した媒質に加えられた摂動の時間発展を考えよう。通常、音波は重力と無関係に圧力を復元力として伝わる波動を指すので、ここでは重力を無視する。背景量に添字 0、摂動量に添字 1 をつけて区別して、流体量が  $\rho_1 \ll \rho_0$ ,  $P_1 \ll P_0$  により

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \rho_0 + \rho_1(t, \mathbf{x}), \quad (2.9)$$

$$P(t, \mathbf{x}) = P_0 + P_1(t, \mathbf{x}), \quad (2.10)$$

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_1(t, \mathbf{x}) \quad (2.11)$$

\*2 最初から  $r = R \cos^2(\eta/2)$  と置いてもいい。

と書けるものとする。連続の式および Euler 方程式を  $\rho_1, P_1$  および  $\mathbf{v}_1$  についても線形化すると\*3、とりわけ複雑だった Euler 方程式の移流項  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  は消え

$$\partial_t \rho_1 + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \quad (2.12)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_1 = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P_1 \quad (2.13)$$

が得られる。これらを組み合わせると

$$\partial_t^2 \rho_1 - \nabla^2 P_1 = 0 \quad (2.14)$$

が従い、圧力を復元力とする波の存在が示唆される。そこで密度変化に対する圧力変化を音速  $c_s^2$  を用いて

$$P_1 = c_s^2 \rho_1 \quad (2.15)$$

と書けば、線形化した方程式においては  $c_s$  は背景の量として一定と扱ってよく、密度に対する波動方程式

$$(\partial_t^2 - c_s^2 \nabla^2) \rho_1 = 0 \quad (2.16)$$

が導かれる。この方程式の解は速度  $c_s$  で伝わる波になり、それゆえに  $c_s$  は音速と呼ばれる。

今、背景が時間にも空間にも依存しないので

$$\rho_1(t, \mathbf{x}) = \tilde{\rho}_1 \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})] \quad (2.17)$$

を用いてモード解析を行う。この関数系を波動方程式に代入すると分散関係

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 \quad (2.18)$$

が従い、 $\mathbf{k}$  は大きさのみが重要で方向は関与しないことがわかる。これは背景が等方であることから当然期待される性質である。より直接的に振動数は  $\omega = \pm c_s k$  と表され、伝播方向の違いに過ぎない正負の符号は無視すると、位相速度も群速度も波数によらず

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c_s \quad (2.19)$$

で与えられることがわかる。この性質はしばしば無分散性と呼ばれる。

密度変化に対する圧力の変化は一般に過程の性質によるため、音速も状況に応じて適切なものを考える必要がある。完全流体では熱流がなく流体素片の持つエントロピーも変化しないので、断熱過程を考え

$$c_s^2 := \left. \frac{\partial P(\rho, s)}{\partial \rho} \right|_s \quad (2.20)$$

により音速を定義することが多い。これは 1.1.5 節での定義と同じものである。特に比熱比  $\gamma$  の理想気体であれば、Poisson の法則からもわかるように断熱変化では  $P = K\rho^\gamma$  となるので\*4、音速は

$$c_s = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} \quad (2.21)$$

で与えられる。一方、天体現象を考える際は加熱や冷却によって等温過程の方が良い近似になる場合も多い、その場合はやはり 1.1.5 節で紹介した等温音速が適切な摂動の伝播速度を与える。

\*3 後述の音速  $c_s$  よりも遅いことが暗に仮定されている。

\*4 係数  $K$  はエントロピーに依存するが、煩雑になるのでその依存性は省略した。

音速に対する理解が深まったところで改めて、大きさ  $R$  程度の構造において圧力が効果を発揮するのにかかる時間スケールは、音速が系を横切る音波通過時間 (sound crossing time)

$$t_{\text{sc}} = \frac{R}{c_s} \quad (2.22)$$

で特徴づけられることが期待される。とりわけ静水圧平衡

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = -\nabla \Phi \quad (2.23)$$

は、自由落下時間と音波通過時間とが同程度になる条件と見直すことができる。勾配を系の大きさ  $R$  による割り算で置き換え、数係数も無視して次元解析を行うと、重力の表式も考慮してこの式は

$$\frac{c_s^2}{R} \approx \frac{GM}{R^2} \approx G\rho R \quad (2.24)$$

と書き直せる。これを変形すると  $t_{\text{ff}} \approx t_{\text{sc}}$  が従う。

## 2.2 臨界比熱比

重力不安定によって重力崩壊を始めた物質が小スケールに密度の高い天体を形成するためには、始まった崩壊が止まることなく十分に進む必要がある。重力および圧力勾配力が系の典型的な大きさに対しどう依存するか考察することで、この可否が実効的な比熱比によって決まること、さらに可否の閾値は形状に依存することを導くことができる。ここでは圧力が (少なくとも近似的に)

$$P = K\rho^\Gamma \quad (2.25)$$

とポリトロップで与えられる場合を考え、 $\Gamma$  が実効的な比熱比  $\gamma_{\text{eff}}$  を表すとして議論する。閾値は  $\gamma_{\text{crit}}$  と呼ぶ。

### 2.2.1 球の臨界比熱比

質量  $M$ 、半径  $R$  の球対称系を考えると、その表面での重力および圧力勾配力は次元解析により質量あたり

$$F_g = \frac{GM}{R^2}, \quad (2.26)$$

$$F_p \approx \frac{K\rho^{\Gamma-1}}{R} \quad (2.27)$$

で与えられる。密度は半径に対し  $\rho \propto R^{-3}$  と依存することが期待されるので、力の大きさの比は半径に

$$\frac{F_g}{F_p} \propto R^{3\Gamma-4} \quad (2.28)$$

のように依存し、ここから臨界比熱  $\gamma_{\text{crit}} = 4/3$  が定まる。というのは、 $\Gamma > 4/3$  では重力崩壊が進んで  $R$  が小さくなるといずれ圧力勾配力が重力より強くなって崩壊が止まるのに対し、 $\Gamma < 4/3$  ではひとたび重力崩壊が始まると重力が支配的になり続けて止めることはできない、と振る舞いが  $\Gamma = \gamma_{\text{crit}}$  を境に定性的に変わるからである\*5。通常物質の断熱変化では比熱比に応じて  $\Gamma \geq 4/3$  となるのが普通なので、球対称形状が崩壊

\*5 この性質を元に「重力のガンマは 4/3」のような言い方がしばしばなされる。

するには何らかの冷却過程が必要である。なお、境目である  $\Gamma = 4/3$  での崩壊の可否は質量のみによって決まり、 $M \propto \rho R^3$  であることから、数係数を無視すれば

$$M_{\text{crit}} \approx \left( \frac{K}{G} \right)^{3/2} \quad (2.29)$$

で与えられる。

## 2.2.2 円筒の臨界比熱比

半径  $R$ 、線密度  $\lambda$  の軸対称な無限円筒を考えると、表面での重力は Poisson 方程式を解析する、あるいは Gauss の法則を用いることで

$$F_g = \frac{2G\lambda}{R} \quad (2.30)$$

と求まる。圧力勾配力は球対称系と変わらないが、対称性から円筒に沿った方向には崩壊せず、密度は  $\rho \propto R^{-2}$  となる。よって力の比は

$$\frac{F_g}{F_p} \propto R^{2(\Gamma-1)} \quad (2.31)$$

で与えられ、臨界比熱は  $\gamma_{\text{crit,cyl}} = 1$  に変わる。等温過程で  $\Gamma = 1$  なので、円筒形状が十分に崩壊するには何か効率のよい冷却過程によって温度を下げるのが必須だと言える。

## 2.2.3 平板の臨界比熱比

中心面から表面までの厚さ  $R$  の無限平板を考えると、重力の強さは面密度  $\Sigma$  を用いて

$$F_g = 2\pi G\Sigma \quad (2.32)$$

で与えられ、厚さに依存しない。圧力勾配力はやはり変わらず、平板の収縮での密度変化  $\rho \propto R^{-1}$  を考えると力の比は

$$\frac{F_g}{F_p} \propto R^\Gamma \quad (2.33)$$

で与えられ、臨界比熱は  $\gamma_{\text{crit,pl}} = 0$  となる。つまり、平板形状で崩壊しうるのは、密度上昇に伴って圧力の下がるような特異な状況（ないし病的な物質）のみである。

## 2.2.4 考察

星間物質などが重力によって集まり崩壊して構造を作る場合、最初は平板状に重力不安定が始まったとしても、平板形状のまま十分に圧縮された構造（シート）を作ることは難しい。平板が圧力勾配力で崩壊を止めた後に、それがさらに円筒形状に崩壊して構造（フィラメント）を作ることは、冷却が極めて効率的な場合にはありうる。球状の構造は等温過程や、それほど温度が下げられない場合、例えば  $\gamma_{\text{eff}} \approx 1.1$  程度でも崩壊が進むので、通常は星のような球状の天体が形成される。

## 2.3 Jeans 不安定

構造形成を考えるにあたり、始まった重力崩壊が止まらずに進む条件は臨界比熱比で与えられることを見たが、そもそも重力不安定が誘起される条件を知る必要がある。これは流体の安定性解析によって求めることが

でき、対応する不安定性は Jeans 不安定と呼ばれる。この解析は、不安定性が起きる空間スケールや形成される天体の質量を知る上でも重要である。

### 2.3.1 一様媒質の Jeans 不安定

背景場として無限に広がった一様な静止流体を考え、その上で摂動が成長する条件を安定性解析により見出そう。背景量に添字 0、摂動量に添字 1 をつけて区別し

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \rho_0 + \rho_1(t, \mathbf{x}), \quad (2.34)$$

$$P(t, \mathbf{x}) = P_0 + P_1(t, \mathbf{x}), \quad (2.35)$$

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_1(t, \mathbf{x}), \quad (2.36)$$

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \Phi_0 + \Phi_1(t, \mathbf{x}) \quad (2.37)$$

と書けるものとする（この点は後で振り返る）。連続の式、Euler 方程式、重力場の Poisson 方程式は

$$\partial_t \rho_1 + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \quad (2.38)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_1 = -\frac{c_s^2}{\rho_0} \nabla \rho_1 - \nabla \Phi_1, \quad (2.39)$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_1 \quad (2.40)$$

となり、これらを組み合わせると

$$\partial_t^2 \rho_1 = c_s^2 \nabla^2 \rho_1 + 4\pi G \rho_0 \rho_1 \quad (2.41)$$

が得られる。ここでモード解析のため

$$\rho_1(t, \mathbf{x}) = \tilde{\rho}_1 \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})] \quad (2.42)$$

を仮定して代入すると分散関係として

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0 \quad (2.43)$$

が従う。背景が等方的なので、分散関係は波数の向きには依存せず、大きさだけが関与する。

以降は背景量のみで議論するので、添字 0 を省略する。重力がなかったとすればこの分散関係は  $\omega = c_s k$  となって音波に帰着し、あらゆるモードは安定に伝播する。重力を考えると、Jeans 波数

$$k_J := \frac{1}{c_s} \sqrt{4\pi G \rho} \quad (2.44)$$

を境に安定性が分かれる。まず  $k > k_J$  の短波長では  $\omega^2 > 0$  なので  $\omega$  は実数となる。この場合、 $\omega$  に正負の組があることを考慮して  $e^{\pm i\omega t}$  なる 2 つの時間依存性を持つモードが得られるが、いずれも振動するだけで摂動の大きさが成長することはなく、重力崩壊も起こさない。一方  $k < k_J$  の長波長では  $\omega^2 < 0$  となり、 $\omega$  は純虚数になる。この場合、 $e^{-|\omega|t}$  は減衰するだけであるが、 $e^{+|\omega|t}$  は指数関数的に増大するので、重力崩壊を起こす不安定モードとなる。物理的には、小スケールが多少潰れてもすぐに圧力勾配が大きくなって安定化する一方、大スケールでは圧力勾配が効かないので崩壊してしまう、と見ることができる。このように、分散関係を導出して  $\omega^2$  の正負から安定性を議論するのは常套手段である\*6。今の不安定モードは指数関数的に成長するので、摂動は短時間で背景と同程度の大きさになって線形化による取り扱いが破綻し、それ以降の発展を知るためには非線形な方程式を解く必要がある。

\*6 系によっては  $\omega^2$  が複素数になる場合もあり、そのときは  $\omega$  の虚部の符号によって安定性が議論できる。



Jeans 波数に対応して Jeans 波長

$$\lambda_J := \frac{2\pi}{k_J} = \sqrt{\frac{\pi}{G\rho}} c_s \quad (2.45)$$

も定義できる。数係数を無視すれば  $\lambda_J \approx c_s t_{\text{ff}}$  となり、つまり自由落下時間のうちに音波が伝わるか否かが重力崩壊の可否を分ける、というのが直観的な解釈である。

今の分散関係では波数が小さければ小さいほど、つまり摂動の波長が長ければ長いほど  $-\omega^2$  が大きくなり、崩壊は早まる。これは波数の小さいモードほど圧力勾配力が弱いためと理解でき、先の臨界比熱比の議論とも整合的である。すると最も早く崩壊するのは波数 0 のモード、つまり全領域となって、崩壊する領域の質量を素直に予言することはできない。そこで通常、Jeans 波長を半径とする球の中の質量をもって Jeans 質量

$$M_J := \frac{4\pi}{3} \rho \left( \frac{\lambda_J}{2} \right)^3 = \frac{\pi^{5/2}}{6G^{3/2}} c_s^3 \rho^{-1/2} \quad (2.46)$$

$$= 1.7 M_\odot \left( \frac{c_s}{0.2 \text{ km s}^{-1}} \right)^3 \left( \frac{n_{\text{H}_2}}{10^5 \text{ cm}^{-3}} \right)^{-1/2} \quad (2.47)$$

を定義し、形成しうる構造の典型的な質量とみなす。2 行目の見積もりでは星形成が起こる分子雲で期待される、10 K の音速および水素分子数密度  $n_{\text{H}_2}$  を仮定した。なお、等温環境では音速が温度の平方根に比例するので、 $M_J \propto T^{3/2} \rho^{-1/2}$  ともできる。圧力が大きいほど、あるいは密度が低いほど Jeans 質量が大きくなるのは、圧力がより大きな質量まで崩壊を妨げられるからと解釈でき、Jeans 質量よりも軽い天体を重力崩壊で直接的に形成することはできない\*7。ここで見積もられた Jeans 質量が星の典型的な質量に近いことは、重力崩壊によって天体が形成されるという議論が大筋で間違っていないことを示唆する。

最後に“Jeans’ swindle”と呼ばれるこの解析の限界についてコメントしておく。添字を戻して、本来なら一様密度媒質中の背景ポテンシャルは  $\nabla^2 \Phi_0 = 4\pi G \rho_0$  を満たすはずであり、 $\Phi_0$  が一定であることは整合しない。本来なら一様等方分布では特別な方向がなく力が働かないはずなので、便宜的に  $\nabla \Phi_0 = 0$  とみなすことは正当化できそうであり、これを Euler 方程式に用いたとすれば矛盾はない。しかし、原点を一つ定めればその周りの分布は球対称なので、あらゆる半径の物質が内側の重力に引かれて落ちてくるはずだ、と考えることもできよう。この議論は基礎方程式たる Poisson 方程式が無限遠での境界条件を要求する、あるいは各時刻で全空間の密度が各点の重力場に寄与する Newton 重力の限界を示している。天体形成の議論において無限に広がった媒質という単純化をどこまで真面目に捉えるかは冷静に考えた方がよいが、それはそれとして無限に広がった物質を扱いたければ一般相対論から出発するのが素直である。そうすると、一様な密度は宇宙膨張（ないし収縮）に寄与するので、膨張宇宙を背景としてその上の摂動を考えればよい。しかし、膨張する流体を背景として摂動を考え、不安定性を議論することは Newton 重力でも可能である。

### 2.3.2 膨張媒質中の Jeans 不安定

背景は静止しているのではなく、全体が一様に膨張（ないし収縮）していると考えれば、Poisson 方程式と矛盾なく重力不安定を解析できる。このときあらゆる場所は等価なので、原点はどこに定めても一般性を失わない。膨張の効果を陽に取り入れるため、ここでは独立な座標を通常的位置  $\mathbf{x}$  から

$$\mathbf{x} = a(t)\mathbf{X} \quad (2.48)$$

\*7 直接的な崩壊が回転などによって妨げられ、さらに分裂を経ることで軽い天体を作るなどの可能性は十分考えられる。

と、 $a(t)$  で表される流体の一樣膨張に付随して伸縮する共動座標  $\mathbf{X}$  に書き換える。流体の速度  $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$  は一樣膨張に付随する部分と特異速度と呼ばれる部分とに分けられ

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \dot{a}(t)\mathbf{X} + a(t)\dot{\mathbf{X}} \quad (2.49)$$

$$= H(t)\mathbf{x} + \mathbf{v}_1(t, \mathbf{x}) \quad (2.50)$$

と書ける。膨張率を表す  $H(t) := \dot{a}/a$  は、宇宙論では Hubble パラメータと呼ばれる。ここではまだ特異速度  $\mathbf{v}_1$  が摂動的であるとはしておらず、一般の議論である。

共動座標によって基礎方程式を書き直す。便宜上、物理座標を用いる際の時間を  $t_{\text{phys}}$ 、共動座標を用いる際の時間を  $t$  と文字を分けて書くと、関連する微分は

$$\frac{\partial}{\partial t_{\text{phys}}} = \frac{\partial}{\partial t} - H\mathbf{x} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.52)$$

と変換できる。以降、この節の  $\nabla$  は  $\mathbf{X}$  での偏微分を表すものとする、連続の式、Euler 方程式、重力ポテンシャルの Poisson 方程式はそれぞれ

$$\partial_t \rho + 3H\rho + \frac{1}{a} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_1) = 0, \quad (2.53)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_1 + \frac{1}{a} (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 + H\mathbf{v}_1 + \ddot{a}\mathbf{X} = -\frac{1}{\rho a} \nabla P - \frac{1}{a} \nabla \Phi, \quad (2.54)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho a^2 \quad (2.55)$$

と書き換えられる。

ここから、密度および圧力を空間的に一樣な背景と摂動とに分け、特異速度も一樣膨張への摂動と考えると重力不安定を考察する。ただし、重力ポテンシャルが空間的に一樣であることは要請しない。まず背景に矛盾がないことを確かめるため、背景量の満たす方程式を書くと

$$\partial_t \rho_0 + 3H\rho_0 = 0, \quad (2.56)$$

$$\ddot{a}\mathbf{X} = -\frac{1}{a} \nabla \Phi_0 \quad (2.57)$$

$$\nabla^2 \Phi_0 = 4\pi G \rho_0 a^2 \quad (2.58)$$

となる。Poisson 方程式の球対称解を求めると、時間微分はないので  $\rho_0$  も  $a$  も定数とみなしてよく

$$\Phi_0(t, \mathbf{X}) = \frac{2\pi}{3} G \rho_0 a^2 |\mathbf{X}|^2 \quad (2.59)$$

が得られる。連続の式は共動座標で一定の半径を持つ球内の質量保存則  $(4\pi/3)\rho_0 a^3 = M$  を表している\*8。Euler 方程式は

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3} G \rho_0 a = -\frac{GM}{a^2} \quad (2.60)$$

を導き、これは一樣密度  $\rho_0$  の球における半径  $a$  の球殻の運動方程式にほかならない。これに  $\dot{a}$  をかけて積分すればエネルギー保存則

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{GM}{a} = E \quad (2.61)$$

\*8 これが本当に質量の次元を持つのは、 $a(t)$  が長さの次元を持ち  $\mathbf{X}$  が無次元になっている場合である。物理的にはあくまで  $\mathbf{x} = a\mathbf{X}$  の組み合わせの次元が重要であり、例えば  $\mathbf{X}$  を長さにして  $a(t)$  は無次元としても全く問題ない。

を導くことができ\*9、エネルギー  $E$  に応じて膨張則  $a(t)$  が定まる。とりわけ重要な例として、エネルギーが 0 であれば保存則は

$$a(t) = \left( \frac{9GM}{2} \right)^{1/3} t^{2/3} \quad (2.63)$$

を導いて  $H(t) = 2/(3t)$  となり、さらに

$$\rho_0(t) = \frac{1}{6\pi G t^2} \quad (2.64)$$

も従う。

次いで摂動について線形化すると、それらの従う方程式は

$$\partial_t \rho_1 + 3H\rho_1 + \frac{\rho_0}{a} \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \quad (2.65)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_1 + H\mathbf{v}_1 + \frac{c_s^2}{a\rho_0} \nabla \rho_1 - \frac{1}{a} \nabla \Phi_1 = 0, \quad (2.66)$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_1 a^2 \quad (2.67)$$

となる。Euler 方程式において、 $\ddot{\mathbf{a}}\mathbf{X}$  は背景重力場に相殺された。さて、ここでの密度の変化には膨張に伴う変化と摂動に伴う変化とが共存している。それらを切り分けるため、相対的な摂動の大きさを表す密度揺らぎ

$$\delta := \frac{\rho_1}{\rho_0} \quad (2.68)$$

を定義する。この量の時間偏微分もドットで表すこととして、背景の方程式も組み合わせると連続の式は

$$\dot{\delta} + \frac{1}{a} \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \quad (2.69)$$

と書き換えられる。先に速度場の発散がない場合を考えておくと、 $\dot{\delta} = 0$  が成り立ち、密度揺らぎは変化しないことがわかる。Euler 方程式は渦度  $\boldsymbol{\omega}_1 = \nabla \times \mathbf{v}_1$  を用いて  $\partial_t \boldsymbol{\omega}_1 + H\boldsymbol{\omega}_1 = 0$  と表せる。これは完全流体における循環の保存の表れで、膨張に伴って渦度が下がることを意味しており、特にエネルギーが 0 の場合は  $|\mathbf{v}_1| \propto |\boldsymbol{\omega}_1| \propto t^{-2/3}$  となる。

ここからは重力崩壊を調べるため、特異速度に発散がある場合のみを考える。Euler 方程式の発散を取ってまとめると、密度揺らぎは

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = \frac{c_s^2}{a^2} \nabla^2 \delta + 4\pi G \rho_0 \delta \quad (2.70)$$

に従って発展することがわかる。密度揺らぎを共動座標における波数  $\mathbf{K}$  によって

$$\delta(t, \mathbf{X}) = \tilde{\delta}(t) \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{X}) \quad (2.71)$$

とモード分解すると、上記の式から

$$\ddot{\tilde{\delta}} + 2H\dot{\tilde{\delta}} = \left( 4\pi G \rho_0 - \frac{c_s^2 K^2}{a^2} \right) \tilde{\delta} \quad (2.72)$$

が従う。密度揺らぎが成長できるのはこの右辺が正の場合で、再び添字 0 を省略するとこの条件は

$$K < K_J = \frac{a}{c_s} \sqrt{4\pi G \rho} \quad (2.73)$$

\*9 これを

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 + \frac{2E}{a^2} \quad (2.62)$$

と書き換え、 $-2E$  を宇宙の曲率と見ると、宇宙項がない場合の Friedmann 方程式になっている。

を与える。これを  $a$  で割って物理的な座標での波数に直すと、膨張する流体の中でも先に導いた Jeans 波数  $k_J$  が成長の可否を与えていることが確認できる。なお、 $\rho a^2$  が減少していく場合、音速が急激に下がらない限りは共動座標での Jeans 波数  $K_J$  も付随して減少し、より大きなスケールの構造が不安定化するようになる。

媒質が膨張していることによる顕著な影響は、摂動の大きさの時間依存性に現れる。それを見るため、長波長極限や物質が圧力を持たないなどの理由で圧力勾配力が無視でき、最も成長が速いであろう場合を考える。さらに簡単のため、 $a$  が  $t^{2/3}$  に比例する場合を考える\*<sup>10</sup>。このときの  $H$ ,  $\rho_0$  は既に導いてあり、密度揺らぎは

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} - \frac{2}{3t^2}\delta = 0 \quad (2.74)$$

に従う。この一般解が

$$\delta = C_+ t^{2/3} + C_- t^{-1} \quad (2.75)$$

であることは冪乗を仮定することで容易に導け、成長モードと減衰モードとが存在することがわかる。そのいずれも静止した一様媒質を考えたときのように指数関数的な発展はせず、膨張の影響があるので時間の冪でしか変化しない。成長モードの時間依存性が  $a(t)$  と同じになっていることは特筆に値する。

逆に重力を無視できる短波長極限では、音波によって密度揺らぎが振動することを念頭に、時間依存性を変動の遅い部分  $A(t)$  と速い部分  $\Phi(t)$  とに分けた

$$\delta(t, \mathbf{X}) = A(t) \exp[-i(\Phi(t) - \mathbf{K} \cdot \mathbf{X})] \quad (2.76)$$

による解析が有用である。この分け方においては  $\Phi$  やその時間微分を  $\mathcal{O}(K)$  の量、 $\dot{A}$  やその時間微分を  $\mathcal{O}(1)$  とみなし、 $K$  の次数について整理して解を求める。最高次の  $\mathcal{O}(K^2)$  は

$$(\dot{\Phi})^2 - \frac{c_s^2 K^2}{a^2} = 0 \quad (2.77)$$

を導き、ここから

$$\Phi(t) = \pm K \int^t \frac{c_s}{a(t')} dt' \quad (2.78)$$

を得る。この表式は音速がゆっくり時間変化しても成り立つ。次に  $\mathcal{O}(K)$  は

$$A\ddot{\Phi} + 2\dot{A}\dot{\Phi} + \frac{2\dot{a}}{a}A\dot{\Phi} = 0 \quad (2.79)$$

を導き、ここから

$$a^2 A^2 \dot{\Phi} = \text{const.} \quad (2.80)$$

に従う。よって、膨張則によらず

$$A(t) \propto \frac{1}{\sqrt{c_s K a(t)}} \quad (2.81)$$

であることが言える。これは揺らぎである音波が振動するだけでなく膨張と共に減衰することを意味しており、特に  $a \propto t^{2/3}$  の場合は  $A \propto t^{-1/3}$  となる。なお、 $\mathcal{O}(1)$  では

$$\ddot{A} + \frac{2\dot{a}}{a}\dot{A} = 0 \quad (2.82)$$

から

$$a^2 \dot{A} \propto a^{1/2} \dot{a} = \text{const.} \quad (2.83)$$

が導かれる。これは  $a \propto t^{2/3}$  ないし  $a = \text{const.}$  であれば整合している。なので、 $a \propto t^{2/3}$  ではこの手順で求めた解が摂動の範囲で厳密な解になっている。

\*<sup>10</sup> 一般相対論的な宇宙膨張では、物質優勢期を考えていることに相当する。

## 2.4 球対称等温重力崩壊の自己相似解

一様媒質が重力崩壊を起こし密度が上昇するとき、ポリトロープであれば音速はおおよそ  $c_s = \sqrt{\partial P / \partial \rho} \propto \rho^{(\Gamma-1)/2}$  で与えられるため、Jeans 質量は  $M_J \propto \rho^{(3\Gamma-4)/2}$  に従い、不安定な状況下では  $\Gamma < 4/3$  であることから Jeans 質量は減少する。特に等温で崩壊を続ける場合、 $M_J \propto \rho^{-1/2}$  となる。ここから、崩壊する物質の中心部では、上昇していく密度に応じてその Jeans 質量に対応するコアだけが暴走的に収縮していくと示唆される。この節では、球対称かつ等温で進行する過程のみを考える。

重力には特別なスケールがないことを反映して、様々な過程に対してしばしば自己相似解が導出でき、実際の現象を記述する上で有用となりうる。自己相似というのは、時間の経過に伴って密度分布  $\rho(t, r)$  や動径速度分布  $v(t, r)$  は変化するが、全体のスケールを適切に伸縮することで常に同じ分布に従う、つまり分布が相似であり続けることを意味する。以下、重力崩壊を記述する代表的な自己相似解を見ていく。

### 2.4.1 依存性の分離

まずは自己相似解を記述する方程式を導出するため、無次元の自己相似変数  $x = x(t, r)$  を導入して動径座標から

$$r = a(t)x \quad (2.84)$$

と時間依存性が分離できたとする。このとき

$$\partial_t x = -\frac{\dot{a}}{a}x, \quad (2.85)$$

$$\partial_r x = \frac{1}{a} \quad (2.86)$$

が成り立つ。以下では等温での Euler 方程式

$$\partial_t v + v\partial_r v = -\frac{c_s^2}{\rho}\partial_r \rho - \frac{Gm}{r^2} \quad (2.87)$$

に加え、連続の式の代わりに時刻  $t$  に半径  $r$  内に含まれる質量  $m(t, r)$  に対して成り立つ質量の定義式

$$\partial_r m = 4\pi r^2 \rho, \quad (2.88)$$

および流入による質量の時間変化を与える式

$$\partial_t m = -4\pi r^2 \rho v \quad (2.89)$$

を基礎方程式として採用する。これらに対して

$$v(t, r) = V(t)\tilde{v}(x), \quad (2.90)$$

$$\rho(t, r) = D(t)\tilde{\rho}(x), \quad (2.91)$$

$$m(t, r) = M(t)\tilde{m}(x) \quad (2.92)$$

を仮定して代入すると

$$\partial_t v = \dot{V}\tilde{v} - \frac{\dot{a}V}{a}\tilde{v}'x, \quad (2.93)$$

$$\partial_r v = \frac{V}{a} \tilde{v}' \quad (2.94)$$

などを用いて

$$\dot{V}\tilde{v} - \frac{\dot{a}V}{a}\tilde{v}'x + \frac{V^2}{a}\tilde{v}\tilde{v}' = -\frac{c_s^2}{a}(\ln \tilde{\rho})' - \frac{GM}{a^2}\frac{\tilde{m}}{x^2}, \quad (2.95)$$

$$\frac{M}{a}\tilde{m}' = 4\pi a^2 D x^2 \tilde{\rho}, \quad (2.96)$$

$$M\dot{\tilde{m}} - \frac{\dot{a}M}{a}\tilde{m}'x = -4\pi a^2 DV\tilde{\rho}\tilde{v}x^2 \quad (2.97)$$

と変形される。

時間依存性と  $x$  依存性が分離された解が得られるには、(非自明な相殺が起こる場合を除き) 各々の式において全ての項の時間依存性が 0 を含む定数倍を除いて等しくなければならない。これを要請すると、Euler 方程式から

$$V(t) = \text{const.}, \quad (2.98)$$

$$\frac{M(t)}{a(t)} = \text{const.} \quad (2.99)$$

が、それを踏まえて質量の定義式から

$$a^2(t)D(t) = \text{const.} \quad (2.100)$$

が従う。更に Euler 方程式は  $\dot{a}(t) = \text{const.}$  を要求するので、これを解くことで他の関数の時間依存性も定まる。質量の時間発展の式もこれらの時間依存性と整合的である。

## 2.4.2 Larson-Penston 解

Larson-Penston 解は星形成時の重力収縮の特に早期段階において中心部で典型的に実現される、球対称で等温<sup>\*11</sup>の自己相似解を記述する [R. B. Larson, MNRAS 145, 271-295 (1969), M. V. Penston, MNRAS 144, 425-448 (1969)]。ここでは時刻  $t = 0$  に崩壊を迎える解を考え、正負および次元を考慮して

$$a(t) = c_s(-t), \quad (2.101)$$

$$V(t) = -c_s, \quad (2.102)$$

$$D(t) = \frac{1}{4\pi G(-t)^2}, \quad (2.103)$$

$$M(t) = \frac{c_s^3(-t)}{G} \quad (2.104)$$

と置く。左辺の  $(t)$  は引数を表すが、右辺の  $(-t)$  は時間に負符号をつけただけのものである。この無次元化では、崩壊が近づくと共に特徴的な密度は上昇する一方、空間や質量の特徴的なスケールは小さくなるものが織り込まれており、中心の暴走的収縮という描像に整合的である。基礎方程式は

$$(x - \tilde{v})\tilde{v}' = (\ln \tilde{\rho})' + \frac{\tilde{m}}{x^2}, \quad (2.105)$$

$$\tilde{m}' = \tilde{\rho}x^2, \quad (2.106)$$

<sup>\*11</sup> いわゆるダストが熱放射を行うことで冷却し、 $\rho \lesssim 10^{-13} \text{ g cm}^{-3}$  では等温に保たれる。中心部分で密度が上がりすぎると放射が抜けられなくなり(光学的に厚くなり)、水素分子からなる断熱的なコアが形成される。

$$-\tilde{m} + \tilde{m}'x = \tilde{\rho}\tilde{v}x^2 \quad (2.107)$$

と無次元化され、質量に関する式を組み合わせると

$$\tilde{m} = \tilde{\rho}(x - \tilde{v})x^2 \quad (2.108)$$

はすぐに従う。これを用いて Euler 方程式を 2 通りに整理することで、自己相似解を定める式

$$\frac{d\tilde{v}}{dx} = \frac{x - \tilde{v}}{x} \frac{(x - \tilde{v})\tilde{\rho}x - 2}{(x - \tilde{v})^2 - 1}, \quad (2.109)$$

$$\frac{d \ln \tilde{\rho}}{dx} = \frac{x - \tilde{v}}{x} \frac{\tilde{\rho}x - 2(x - \tilde{v})}{(x - \tilde{v})^2 - 1} \quad (2.110)$$

が導かれる。特別な解として静的な  $\tilde{v} = 0$ ,  $\tilde{\rho} = 2/x^2$ ,  $\tilde{m} = 2x$  があり、これは後述する特異等温球を表している。また、 $\tilde{v} = 2x/3$ ,  $\tilde{\rho} = 2/3$ ,  $\tilde{m} = 2x^3/9$  と半径に比例した速度で密度を一様に保ちながら落下する、いわゆる homologous collapse を表す解もある。

これら  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{\rho}$  に対する式が物理的に妥当な解を持つのは、右辺の分母が 0 になる点が単に発散する特異点にはならず、分子も 0 になって有限の値を持つ臨界点になる場合のみである。分母が 0 になるのは  $x = 0$  および  $x - \tilde{v} = \pm 1$  であり、これらで分子も 0 になり正則な解が得られる条件は  $x = 0$  に対して  $\tilde{v} = 0$ ,  $x - \tilde{v} = +1$  に対して  $\tilde{\rho}x = +2$  である。前者の条件をある時刻  $t$  に着目して考えると、 $x = 0$  は  $r = 0$  に対応するので、流体の中心では運動がないという条件になっている。これは中心に点状コアを持たず、物理量が発散しない解では満たされる必要がある（付録 A.1 も参照のこと）。一方ある半径  $r$  に注目した場合、 $x = 0$  は今度は  $t \rightarrow -\infty$  を意味するので、各点で無限の過去には静止しているという条件にも解釈できる。ただし、現実的な状況において自己相似解が最初から最後まで成立すると考える必然性はなく、あくまで時間が経つにつれて、特に外部の影響が少ない中心付近で近似的に実現される解と捉えるのが妥当である。後者の点は、次元を戻して物理量で書くと  $\partial r / \partial t \Big|_x = v - c_s$  なる点  $x$  を指すことがわかる。今は速度  $v$  が負の状況を考えているので、これは落下していく自己相似分布のうち、内向きに流れる流体の速度にさらに音速を加えた速度で移動している点  $x$  を指し、内向き遷音速点と呼ばれる。臨界点の候補には他に  $x - \tilde{v} = -1$  もあり、これは外向き遷音速点であって  $\tilde{\rho}x = -2$  を要求するが、崩壊する解を仮定した今の定式化では非物理的であり、この点を通ることはない。

考えたい状況を表す境界条件の下で漸近的な振る舞いを調べることで、解の特徴を少なからず理解できると同時に、臨界点を通るかどうかも把握できる。まず中心付近を考え、原点でも密度が有限で  $\tilde{\rho}(x = 0) = \tilde{\rho}_0$  となることを仮定すると<sup>\*12</sup>

$$\frac{d\tilde{v}}{dx} \rightarrow \frac{2(x - \tilde{v})}{x} \quad (2.111)$$

より  $\tilde{v}(x \rightarrow 0) = 2x/3$  が得られ、すると密度の式は

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dx} \rightarrow 0 \quad (2.112)$$

を導き密度が有限であることと整合する。このとき、 $\tilde{m}(x = 0) = 0$  となり、中心に点状コアは存在しない。次に無限遠方、つまり  $x \rightarrow \infty$  で速度が有限にとどまり密度が 0 に近づく解を考えるならば

$$\frac{d\tilde{v}}{dx} \rightarrow 0, \quad (2.113)$$

<sup>\*12</sup> 正確にはここでは  $x^{-2}$  より、次では  $x^{-1}$  より発散が遅ければよい。特異等温球は原点で分子が 0 になっている。

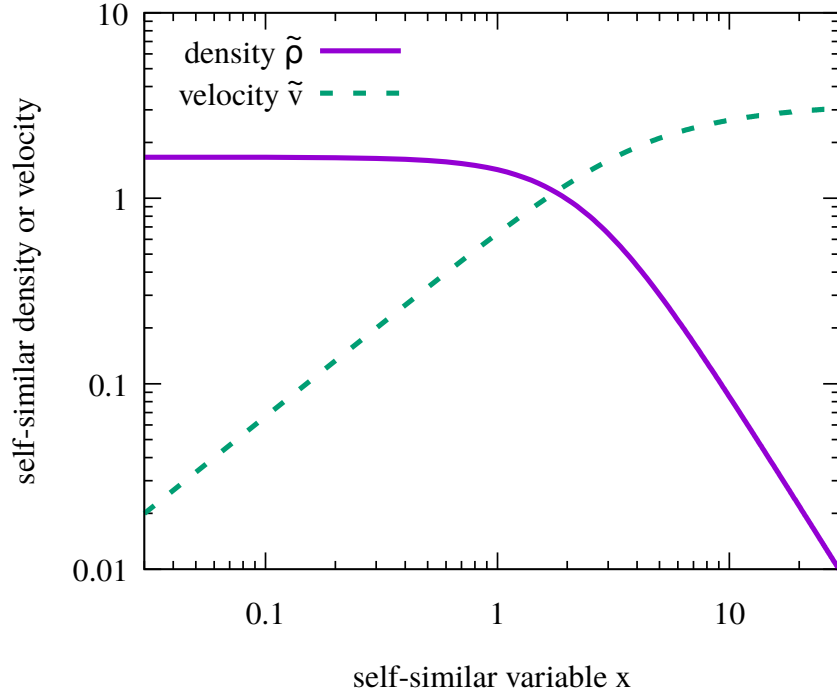


図 2.1 Larson-Penston 解の密度分布  $\tilde{\rho}(x)$  (紫実線) および速度分布  $\tilde{v}(x)$  (緑破線)。

$$\frac{d \ln \tilde{\rho}}{d \ln x} \rightarrow -2 \quad (2.114)$$

より  $\tilde{v}(x \rightarrow \infty) = \tilde{v}_\infty$  および定数  $\tilde{s}_\infty$  を用いて  $\tilde{\rho}(x \rightarrow \infty) = \tilde{s}_\infty/x^2$  が従う。なお、崩壊時刻  $t \rightarrow -0$  ではあらゆる  $r$  の点が  $x \rightarrow \infty$  に対応する。これらの境界条件を満たす解が必ず遷音速点  $x - \tilde{v} = 1$  を通ることは、 $x = 0$  では  $x - \tilde{v} = 0$  に、 $x \rightarrow +\infty$  では  $x - \tilde{v} \rightarrow +\infty$  になることから確認できる。

この漸近条件を満たす解では、全領域で圧力勾配が無視できない。無次元化した量での圧力勾配力は  $-(\ln \rho)'$  で与えられ、(2.110) 式を用いると原点付近では  $(1/3)(\tilde{\rho}_0 - 2/3)x$  に、無限遠方では  $2/x$  になる。一方で重力は  $-\tilde{m}/x^2 = -\tilde{\rho}(x - \tilde{v})$  で与えられ、原点付近では  $-(1/3)\tilde{\rho}_0 x$  に、無限遠方では  $-\tilde{s}_0/x$  になる。どちらの極限でも比は一定にとどまり、中間領域で極端なことが起こらなければ（これは方程式を解けば確かめられる）、一方が支配的になる領域はないことがわかる。

中心密度を与えれば自己相似解を定める方程式を解くことができ、正則性条件を満たしつつ遷音速点を通過するものは無限遠方での漸近条件も満たす物理的な解となる。そのような解の中で最も重要なものといえる Larson-Penston 解は数値的に得られており（図 2.1）、 $x = 2.33$  の臨界点を通して原点付近では

$$\tilde{v} \rightarrow \frac{2}{3}x, \quad (2.115)$$

$$\tilde{\rho} \rightarrow 1.667 \quad (2.116)$$

で与えられる一定密度のコア構造に、無限遠方では

$$\tilde{v} \rightarrow 3.28, \quad (2.117)$$

$$\tilde{\rho} \rightarrow \frac{8.86}{x^2} \quad (2.118)$$



で与えられる外層構造に近づく。無限遠でも物質が超音速に落下していて境界条件が物理的でないと見ることもできるが、現実の過程において無限遠までこの自己相似解が適用できると考えるより、崩壊時刻では全領域が超音速に落下していると考えの方が素直であろう。次元を含めて中心密度を具体的に書くと

$$\rho(t, 0) = \frac{1.667}{4\pi G(-t)^2} \quad (2.119)$$

となり、中心密度が発散する重力崩壊までの時間は初期の中心密度を  $\rho_i$  として

$$t_{LP} = \sqrt{\frac{1.667}{4\pi G\rho_i}} \quad (2.120)$$

で与えられる。数係数の違いを除き、これは自由落下時間と本質的に等しい。なお、定義により  $\rho_i = \rho(-t_{LP}, 0)$  となっている。先述の通り圧力勾配力が無視できないにも関わらず、崩壊にかかる時間はおよそ自由落下時間で与えられることが確かめられる。

## 第 3 章

# 自己重力流体の平衡形状

重力不安定によって形成された天体は、やがて静水圧平衡に落ち着くと期待される。その後も天体は、例えば星なら核燃焼などによって徐々に進化するが、その時間スケールは力学的・流体力学的な現象を特徴づける自由落下時間や音波通過時間よりも圧倒的に長いことが普通であり、天体は良い近似で平衡形状（あるいは準平衡形状）にあるとみなせる。平衡形状の構造や特徴、例えば半径と質量との関係などは物質の性質を反映して決まる。例えば我々が普段目にする星や銀河もそうであるように、寿命の長い平衡形状は直接の観測対象としやすいため、その性質を理解することは天体の素性を調べる上で重要である。この章では自転による変形を割愛し、球対称の平衡形状を論じる。

この章の議論は

1. E. Poisson, C. M. Will “Gravity” (Cambridge University Press)
2. B. T. Draine “Physics of the Interstellar and Intergalactic Medium” (Princeton University Press)

を参考にしている。<sup>\*1</sup>

### 3.1 球対称天体の平衡形状

最も基本的な天体の平衡形状として、全く運動のない球対称な流体の静水圧平衡を考える。平衡形状では定義により全ての量は時間に依存せず、速度も 0 なので連続の式は自明に成立する。半径  $r$  の内部にある質量  $m(r)$  を用いると、基礎方程式は Euler 方程式から導かれる静水圧平衡条件

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\rho m}{r^2} \quad (3.1)$$

および質量の定義式

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (3.2)$$

に加え、 $\rho = \rho(P)$  の形の状態方程式で与えられる。微分方程式を組み合わせると質量を消去でき、平衡形状は

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho \quad (3.3)$$

---

<sup>\*1</sup> 本来は S. Chandrasekhar “Ellipsoidal Figures of Equilibrium” (Dover Publications) の内容を抜おうとしていたが、時間が足りなかった。節が中途半端なものそのせいである。

の解として定まる。この二階微分方程式は、中心での圧力  $P_c$  を与え、さらに原点での圧力勾配力に対する正則性条件  $dP/dr = 0$  を課して\*2、外に向かって解けばよい。星の表面は圧力が 0 になる点と定義され、解いた結果そのような点が存在すればそこで星の半径や質量が定まる。非圧縮流体でなければ、圧力の代わりに密度に対する式として解くこともできる。なお、中心で密度や圧力が発散する場合は考えないことにするが、後で具体的な例外にも言及する。

より具体的な状況を考えるため、以下ではポリトロープ関係  $P = K\rho^\Gamma$  を満たす平衡形状を考える\*3。天体の平衡形状における  $\Gamma$  は、比熱比のように圧力源の微視的物性から直ちに与えられる値とは限らず、天体中のエネルギー輸送によって決まることが多い。この講義では  $\Gamma$  の決まり方には踏み込まないが、コンパクト天体で重要となる縮退圧は自然とポリトロープに帰着することは重要である。以下の議論では  $\Gamma$  自体よりも  $\Gamma = 1 + 1/n$  として  $n := 1/(\Gamma - 1)$  により定義されるポリトロープ指数  $n$  の方が便利なので、こちらを主に採用する。極限的な例として  $n = 0$  は  $\rho \propto P^0$  であることから非圧縮流体に、 $n \rightarrow \infty$  は  $\Gamma \rightarrow 1$  より等温ガスに対応する。

平衡形状を定める二階微分方程式 (3.3) 式に現れる物理量は  $\rho$ ,  $P$ ,  $r$  の 3 つだけであり、一方でポリトロープでは次元を持った定数も  $P_c$ ,  $K$ ,  $G$  あるいは  $\rho_c$ ,  $P_c$ ,  $G$  の 3 つになる。するとポリトロープに従う平衡形状は、変数の無次元化により見通しよく理解できると期待される。そのために無次元変数  $\xi$ ,  $\theta$  および  $\mu$  を

$$r = \sqrt{\frac{(n+1)P_c}{4\pi G\rho_c^2}} \xi, \quad (3.4)$$

$$\rho = \rho_c \theta^n, \quad (3.5)$$

$$P = P_c \theta^{n+1}, \quad (3.6)$$

$$m = \sqrt{\frac{(n+1)^3 P_c^3}{4\pi G^3 \rho_c^4}} \mu \quad (3.7)$$

により導入する。天体の中心  $\xi = 0$  は  $\theta = 1$  で指定され、表面は  $\theta = 0$  になる点として定義される。このとき基礎方程式は

$$\frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{\mu}{\xi^2}, \quad (3.8)$$

$$\frac{d\mu}{d\xi} = \xi^2 \theta^n \quad (3.9)$$

に書き換えられ、組み合わせると Lane-Emden 方程式

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n \quad (3.10)$$

が得られる。この方程式を  $\xi = 0$  で  $\theta = 1$ ,  $d\theta/d\xi = 0$  から解き、 $\theta = 0$  になればそこが表面である。星に表面がある条件は以下で確認するが、表面での値を指すときは  $\xi_s$  や  $\mu_s$  と書くことにする。

Lane-Emden 方程式から、天体の構造はポリトロープ指数  $n$  のみによって決まる分布に従い、ポリトロープの比例係数  $K$  や系の中心密度  $\rho_c$  は全体のスケールを定めるだけであることが直ちにわかる\*4。ポリトロープ指数  $n$  を与えると表面の有無および存在する場合は  $\xi_s$  や  $\mu_s$  の値が一意に定まるため、微分方程式を解か

\*2 直交座標で見ると圧力勾配力が不連続にならないことを要請している、と言ってもいい。

\*3 というより、ポリトロープとは元々ポリトロープ関係を満たす球対称平衡形状のことを指すようである。

\*4 一般相対論では光速  $c$  という新たなスケールが入ってくるため、このような明瞭な議論はできない。

ずともこの事実だけから天体の様々な特徴が把握できる。物理量の次元を戻すと、半径は

$$R = \sqrt{\frac{(n+1)P_c}{4\pi G\rho_c^2}} \xi_s \propto \rho_c^{(1/n-1)/2} \quad (3.11)$$

に、質量は

$$M = \sqrt{\frac{(n+1)^3 P_c^3}{4\pi G\rho_c^4}} \mu_s \propto \rho_c^{(3/n-1)/2} \quad (3.12)$$

に従うことがわかり、組み合わせると  $M^{1-n} \propto R^{3-n}$  もわかる。ここから以下の2点が明らかになる。

1.  $n = 1$  ( $\Gamma = 2$ ) では半径が一定になり、中心密度や質量に依存しない。中性子星ではこれに類似した状況が実現している。
2.  $n = 3$  ( $\Gamma = 4/3$ ) では質量が一定になり、中心密度や半径に依存しない。相対論的縮退圧によって支えられた天体などはこれに該当し、Chandrasekhar 質量はこの一定の質量に該当する。

球対称平衡形状が本当に重力的に束縛され、天体となれるかどうか、ポリトロプ指数  $n$  によって決まる。これを考えるには重力ポテンシャルエネルギーの正負を見ればよいだろう。1章の一般的な式から計算してもよいが、ここでは球対称であることを利用して

$$W = -4\pi G \int_0^R \frac{\rho m}{r} r^2 dr \quad (3.13)$$

から計算する。この表式は、半径  $r$  まで質量  $m$  が存在していたところに密度  $\rho$  の球殻を付け加える際に解放されるエネルギーを積分して導かれる。無次元化すると

$$W = -\sqrt{\frac{(n+1)^5 P_c^5}{4\pi G^3 \rho_c^6}} \int_0^{\xi_s} \mu \theta^n \xi d\xi \quad (3.14)$$

となり、この積分は

$$\int_0^{\xi_s} \frac{\mu}{\xi} \theta^n \xi^2 d\xi = \int_0^{\xi_s} \frac{\mu}{\xi} \frac{d\mu}{d\xi} d\xi \quad (3.15)$$

$$= \frac{\mu^2}{2\xi} \Big|_0^{\xi_s} + \frac{1}{2} \int_0^{\xi_s} \frac{\mu^2}{\xi^2} d\xi \quad (3.16)$$

$$= \frac{\mu_s^2}{2\xi_s} + \frac{1}{2} \int_0^{\xi_s} \frac{\mu^2}{\xi^2} d\xi \quad (3.17)$$

および

$$\int_0^{\xi_s} \frac{\mu}{\xi^2} \theta^n \xi^3 d\xi = - \int_0^{\xi_s} \theta^n \frac{d\theta}{d\xi} \xi^3 d\xi \quad (3.18)$$

$$= -\frac{1}{n+1} (\xi^3 \theta^{n+1}) \Big|_0^{\xi_s} + \frac{3}{n+1} \int_0^{\xi_s} \xi^2 \theta^{n+1} d\xi \quad (3.19)$$

$$= \frac{3}{n+1} \int_0^{\xi_s} \theta \frac{d\mu}{d\xi} d\xi \quad (3.20)$$

$$= \frac{3}{n+1} (\mu\theta) \Big|_0^{\xi_s} - \frac{3}{n+1} \int_0^{\xi_s} \mu \frac{d\theta}{d\xi} d\xi \quad (3.21)$$

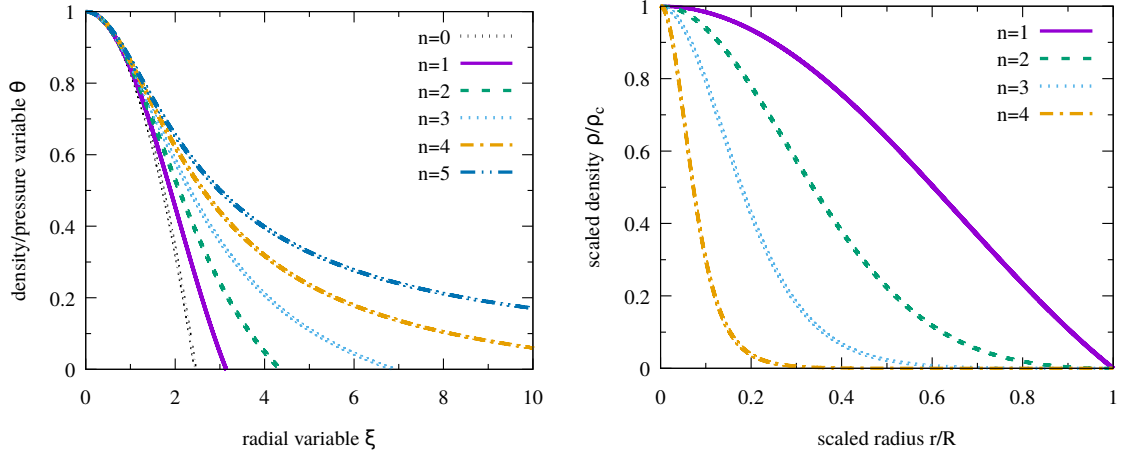


図 3.1 左: ポリトロープ指数  $n = 0$  から 5 までの Lane-Emden 方程式の解  $\theta(\xi)$ 。右: 半径および中心密度で規格化した密度分布。一定密度になる  $n = 0$ 、半径が定まらない  $n = 5$  は除いた。ポリトロープ指数  $n$  が大きくなるほど、密度分布は中心に集中する。これはしばしば  $n$  の大きな、言い換えれば  $\Gamma$  の小さな物質は柔らかく潰れやすいためと解釈される。

$$= \frac{3}{n+1} \int_0^{\xi_s} \frac{\mu^2}{\xi^2} d\xi \quad (3.22)$$

の 2 通りに変形することで

$$W = -\sqrt{\frac{(n+1)^5 P_c^5}{4\pi G^3 \rho_c^6}} \frac{3}{5-n} \frac{\mu_s^2}{\xi_s} \quad (3.23)$$

$$= -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R} \quad (3.24)$$

と求められる。ここから、 $W < 0$  の束縛した天体を作れるのは  $n \leq 5$  だけであることがわかる。正確には等号の場合はこの式からは判断できないが、後に導く  $n = 5$  の解を用いると実際に  $W < 0$  になることが確かめられる。Lane-Emden 方程式は  $n \rightarrow \infty$  の等温球には用いられないが、大きな  $n$  での様子からやはり束縛した天体を作れないであろうことが示唆される。等温球の議論はまた別途行う。

### 3.1.1 Lane-Emden 方程式の解析解

Lane-Emden 方程式は非線形なので一般には数値計算によって解くしかないが、 $n = 0, 1, 5$  には解析解が存在する。これらが必ずしも物理的に重要な解を表すわけではないが、一般の  $n$  に対する数値計算コードの検証などに用いることができるという点で便利である。参考として、様々な  $n$  について数値計算した結果を図 3.1 に示しておく。

まず非圧縮に対応する  $n = 0$  の場合は、容易に積分できて

$$\theta = 1 - \frac{\xi^2}{6} \quad (3.25)$$

となり、表面では

$$\xi_s = \sqrt{6}, \mu_s = 2\sqrt{6} \quad (3.26)$$

を得る。圧力は  $\theta$  に比例するので、次元を戻すと

$$P = P_c \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (3.27)$$

なる 2 次式で与えられる。これは球対称星に限らない非圧縮自己重力流体の静水圧平衡の特徴である。というのは、まず Poisson 方程式の右辺が定数になるため、重力ポテンシャルは直交座標  $x, y, z$  の 2 次式になる。その中で 1 次の項は原点の取り方によって消去でき、また  $xy$  など 2 次の交差項も座標軸の回転によって消去できる。よって、重力ポテンシャルは特に意味のない定数項を除き  $x^2, y^2, z^2$  に比例した項の和で書ける。すると静水圧平衡の式から圧力についても同じことが成り立つ。特にここで考えた球対称平衡形状では  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  の形でしか座標が表れないため、圧力が上記の形になるしかないことは実は解く前から予想できる。

次に  $\Gamma = 2$  に対応する  $n = 1$  の場合は、Lane-Emden 方程式が線形になるので解けることが予想できる。方程式を変形すると

$$\frac{d^2}{d\xi^2}(\xi\theta) = -\xi\theta \quad (3.28)$$

が従い、境界条件を満たす解は

$$\theta = \frac{\sin \xi}{\xi} \quad (3.29)$$

となるので

$$\xi_s = \pi, \quad \sqrt{\mu_s} = \pi \quad (3.30)$$

も得られる。先に考察の通り、次元を戻すと半径は

$$R = \sqrt{\frac{\pi K}{2G}} \quad (3.31)$$

とポリトロプの比例定数  $K$  のみによって決まってしまう、中心密度あるいは質量に依存しないことがわかる。

最後に、束縛された天体を作れるか否かの境目である  $n = 5$  でも解析解が知られている。このときは  $f := \theta^{-2}$  を級数展開して求めるとすぐに打ち切られて

$$\theta = \left( 1 + \frac{\xi^2}{3} \right)^{-1/2} \quad (3.32)$$

が得られる。この  $\theta$  は無限遠まで消えないので、 $n = 5$  の天体の半径は無限と言える。一方、十分遠方では

$$\mu = -\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \rightarrow \sqrt{3} \quad (3.33)$$

となるので、質量は有限であることもわかる。先の一般的な計算では得られなかった重力ポテンシャルエネルギーは、得られた解を積分すると

$$\int_0^\infty \mu \theta^5 \xi d\xi = \frac{3\sqrt{3}\pi}{32} \quad (3.34)$$

となることから、有限の負の値になる。よって  $n = 5$  でも、半径が無限であるという特殊性を除けば束縛した天体を作られることがわかる。

### 3.1.2 等温球

等温球は重力崩壊後に形成される天体の平衡形状というよりも、重力崩壊を起こす前の構造として別途意義深い。状態方程式  $P = c_s^2 \rho$  もポリトロープに該当するが、ポリトロープ指数は  $n \rightarrow \infty$  にあたり、Lane-Emden 方程式をそのまま流用することはできない。まず、無次元化する前の (3.3) 式で  $\rho$  が  $r$  の冪乗となる解を考えてみると、密度や圧力に発散を許せば

$$\rho = \frac{c_s^2}{2\pi G r^2} \quad (3.35)$$

なる解析解が得られることは直ちにわかる。この解は特異等温球 (singular isothermal sphere) と呼ばれ、2.4.2 節で求められた静的な自己相似解と同じものである。この解では半径も質量も発散しており、単独で孤立した天体を表す解にはなっていない。

密度や圧力が発散しない等温球の解を求める上でも、音速や中心密度が全体のスケールを定めるだけであることを見えやすくするため、やはり無次元化が有用である。今の場合、密度や圧力が 0 にならないことを見越して

$$r = \sqrt{\frac{P_c}{4\pi G \rho_c^2}} \xi, \quad (3.36)$$

$$\rho = \rho_c e^{-x}, \quad (3.37)$$

$$P = P_c e^{-x}, \quad (3.38)$$

$$m = \sqrt{\frac{P_c^3}{4\pi G^3 \rho_c^4}} \mu \quad (3.39)$$

と無次元化すると、

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{\mu}{\xi^2}, \quad (3.40)$$

$$\frac{d\mu}{d\xi} = \xi^2 e^{-x} \quad (3.41)$$

ないしそれを組み合わせて

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{dx}{d\xi} \right) = e^{-x} \quad (3.42)$$

を得る。この変数での天体の中心は  $x = 0$  で定められる。遠方での振る舞いは特異等温球と同様になり、半径も質量も発散するという性質を共有している。

外部に圧力  $P_{\text{ext}}$  の物質が存在し、その拮抗により有限の半径  $R$  までに閉じ込められているとすれば、半径  $R$  の内側において有限質量の等温球が平衡形状を保つ。現実の宇宙でも、星形成が起きる星間雲などで同様の状況が成立していると考えられる。特に、以下の解析から外圧で支えられた等温球には最大質量が存在することがわかり、この質量を超えた構造は重力崩壊を起こして星を形成することが期待される。外圧  $P_{\text{ext}}$  が環境により決まっていると、音速  $c_s$  での等温球は  $P_c$  に応じて一つ定まるので、 $\delta := P_c / P_{\text{ext}}$  も有用な無次元量となる。実際、等温球の半径を与える無次元変数  $x = x_s$  は  $P_{\text{ext}} = P_c e^{-x_s}$  により

$$x_s(\delta) = \ln \delta \quad (3.43)$$

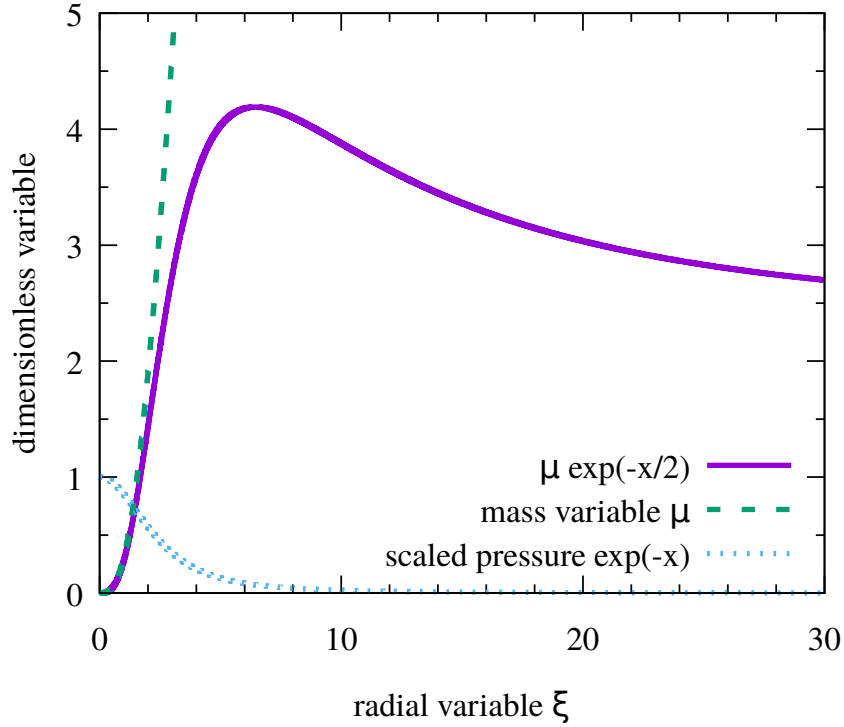


図 3.2 等温球の最大質量を定める  $\mu \exp(-x/2)$  (紫実線) と、無次元化した質量  $\mu$  (緑破線) および中心圧力の値で規格化された圧力  $\exp(-x)$  (青点線)。等温では、密度分布も圧力分布と全く同じである。質量、圧力の兼ね合いで  $\mu \exp(-x/2)$  が最大値を持ち、外圧によりちょうどこの半径まで閉じ込められている平衡形状が最大質量を持つ。

と定まり、対応する  $\mu = \mu_s(\delta)$  も定まる。等温では圧力の比  $\delta$  はそのまま密度の比にもなっており、物質の中心集中度と解釈できる。この半径までの質量は、無次元化した量を用いて

$$M(P_{\text{ext}}, P_c) = \sqrt{\frac{P_c^3}{4\pi G^3 \rho_c^4} \mu_s(\delta)} \quad (3.44)$$

$$= \frac{c_s^4}{\sqrt{4\pi G P_c}} \mu_s(\delta) \quad (3.45)$$

$$= \frac{c_s^4}{\sqrt{4\pi G P_{\text{ext}}}} \frac{\mu_s(\delta)}{e^{x_s(\delta)/2}} \quad (3.46)$$

と書ける。ここでは環境に応じて固定される量が  $P_c$  ではなく  $P_{\text{ext}}$  であることが明白な形に書き換えた。さて、図 3.2 に示す微分方程式を解いて得た解を用いると、等温球の  $\mu e^{-x/2}$  は  $\xi \approx 6.4$  で最大値  $\approx 4.2$  を取ることがわかる。よって、外圧  $P_{\text{ext}}$  の下で実現しうる等温球の平衡形状の最大質量は

$$M_{\text{crit}}(P_{\text{ext}}) \approx 4.2 \frac{c_s^4}{\sqrt{4\pi G P_{\text{ext}}}} = 1.18 \frac{c_s^3}{\sqrt{G \rho_{\text{ext}}}} \quad (3.47)$$

であり、それよりも重くなると（少なくとも静的・球対称な）平衡形状を保てないことが結論される。なお、この等温球は  $\delta \approx 14$  に対応し、下で見るとこれよりも中心集中した  $\delta > 14$  の構造は重力崩壊に対して不安定となる。次元解析から想定できる範疇ではあるが、この最大質量が種々の物理量や定数に対して Jeans 質量と同じ依存性を持っていることも示唆的である。



外圧で支えられた等温球の平衡形状に最大質量が存在することは、ビリアル定理から直観的に理解できる。今は運動がないので、(1.92) 式から平衡形状では

$$P_{\text{ext}}V = \Pi + \frac{W}{3} \quad (3.48)$$

を満たさねばならない。等温では  $\Pi = c_s^2 M$  となり、重力ポテンシャルエネルギーは系の密度分布を反映する  $\mathcal{O}(1)$  の定数  $a$  を用いて  $W = -a \times [3GM^2/(5R)]$  と書くことにすると、外圧は

$$P_{\text{ext}} = \frac{3}{4\pi} \left( \frac{c_s^2 M}{R^3} - \frac{aGM^2}{5R^4} \right) \quad (3.49)$$

を満たす。音速  $c_s$  に加えて系の質量  $M$  も決まっているとすれば、それを半径  $R$  までに閉じ込めておくために必要な外圧は一意に定まる。上式の右辺を  $R$  の関数と見て極値を求めれば、閉じ込めるのに必要な外圧は

$$R_{\text{max}} = \frac{4a}{15} \frac{GM}{c_s^2} \quad (3.50)$$

で最大値

$$P_{\text{ext,max}} = \frac{10125}{1024\pi a^3} \frac{c_s^8}{G^3 M^2} \quad (3.51)$$

を取ることがわかる。これよりも外圧が小さい場合は、2つの半径で平衡形状を実現しうる。そのうち半径が大きい方は、ビリアル定理の関数形からすぐわかるように  $\partial P_{\text{ext}}/\partial R|_M < 0$  であり、安定な平衡形状である。直観的には、等温球が広がると内側の圧力が下がるので外圧に押し戻され、逆もまた然り、ということになっている。一方、半径が小さい方は  $\partial P_{\text{ext}}/\partial R|_M > 0$  なので、等温球は広がるとむしろ圧力を上げて余計に広がってしまうし、縮むと圧力が下がるので余計に潰れる、という理由で不安定な平衡形状になっている。質量  $M$  に対する減少関数として可能な最大の外圧  $P_{\text{ext}}(M)$  が存在する事実を逆に考えると、ある外圧の下で可能な平衡形状の最大質量は

$$M_{\text{BE}}(P_{\text{ext}}) = \frac{45}{32} \sqrt{\frac{5}{a^3 \pi}} \frac{c_s^4}{\sqrt{G^3 P_{\text{ext}}}} \approx \frac{1.77}{a^{3/2}} \frac{c_s^3}{\sqrt{G^3 \rho_{\text{ext}}}} \quad (3.52)$$

と定まり、Bonnor-Ebert 質量と呼ばれる。これは Lane-Emden と類似の微分方程式に基づいて導いた先述の最大質量  $M_{\text{crit}}$  と本質的には等しく、ビリアル定理からは決まらない係数  $a$  は  $\approx 1.3$  に対応する。

## 第 4 章

# 流体から質点系へ

天体が複数存在する場合、それらはお互いに重力を及ぼし合って軌道運動を行う。天体同士の距離が十分に離れていれば、天体の重心運動は内部構造を無視した質点系の軌道運動に近似的に従い、また各々の天体の内部運動も孤立していたときと同じ平衡状態を近似的に保つ。この議論は直観的には尤もだが、では流体力学から出発してどの程度正当化できるのだろうか？ この章では、天体間の距離  $r$  と天体の半径  $R$  とに対し、どの程度の精度で天体の内部構造を無視した議論が許されるかを見る。簡単のため、全ての天体は  $M$  程度の質量を持つとして議論する。

この章の議論は

1. T. Damour, “The problem of motion in Newtonian and Einsteinian gravity”, (1987) in “Three Hundred Years of Gravitation” ed. S. W. Hawking and W. Isreal (Cambridge University Press)
2. E. Poisson, C. M. Will “Gravity” (Cambridge University Press)

の、特に主に 1. に基づいている。天体の潮汐変形には立ち入らないが、興味がある場合は <https://www-tap.scphys.kyoto-u.ac.jp/~kyutoku/document/tildelambda.pdf> およびそこで引用されている文献を参照されたい。

### 4.1 基礎方程式

複数の天体が存在する中で特定の天体  $A$  に着目し、その重心運動および重心に対する相対運動＝内部の流体運動をそれぞれ考える。ここで各々の天体は明確な表面を持ち、他の天体から空間的に離れているとする。基礎方程式は通常の流体の式

$$\partial_t \rho + \nabla_i (\rho v^i) = 0, \quad (4.1)$$

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = -\nabla^i P - \rho \nabla^i \Phi =: f^i, \quad (4.2)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (4.3)$$

で与えられる。ここで後の便宜上、体積あたりの力  $f^i$  を導入した。任意の関数  $f(t, \mathbf{x})$  に対して、連続の式を満たす系では (1.69) 式

$$\frac{d}{dt} \int \rho f d^3x = \int \rho \frac{df}{dt} d^3x \quad (4.4)$$

が成り立つことを改めて確認しておく。以降、全ての計算は直交座標で行うものとする。

重心運動と流体運動とを分離するため、準備として天体  $A$  の大局量を導入する。天体  $A$  に属する流体だけでの積分を  $\int_A$  で表すと、質量は

$$M_A := \int_A \rho(t, \mathbf{x}) d^3x \quad (4.5)$$

で与えられ、これは時間的に変化しない。重心は

$$z_A^i(t) := \frac{1}{M_A} \int_A x^i \rho(t, \mathbf{x}) d^3x \quad (4.6)$$

により定義され、その時間発展は

$$M_A \dot{z}_A^i = \int_A \rho v^i d^3x, \quad (4.7)$$

$$M_A \ddot{z}_A^i = \int_A f^i d^3x \quad (4.8)$$

$$= \delta^{ij} \int_A (-\nabla_j P - \nabla_j \Phi) d^3x \quad (4.9)$$

で定まる。加速度を導出する際は Euler 方程式を用いた。また最後の表式では偏微分の添字を下げるために Kronecker のデルタを導入したが、直交座標を用いているので上下の添字を区別しないとするだけでもよい。

これらを用いて天体  $A$  の運動を重心運動および流体運動に分ける。重力ポテンシャルを  $A$  が作る部分と他の天体を作る部分とに分け、Green 関数によって

$$\Phi_A(t, \mathbf{x}) := -G \int_A \frac{\rho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (4.10)$$

$$\Phi_{-A}(t, \mathbf{x}) := -G \sum_{B \neq A} \int_B \frac{\rho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (4.11)$$

とする。ここで  $B$  は  $A$  以外の天体を指す。これに応じて、力も

$$f_A^i := -\nabla^i P - \rho \nabla^i \Phi_A, \quad (4.12)$$

$$f_{-A}^i := -\rho \nabla^i \Phi_{-A} \quad (4.13)$$

と  $A$  自身の圧力および重力による部分と他の天体による重力の部分とに分けることができる。

## 4.2 重心運動 (external problem)

まず天体  $A$  の重心運動を考え、それが質点系の運動とみなせること、さらに内部構造の影響が  $\mathcal{O}((R/r)^5)$  でしか効かないことを見る。前節の考察により、重心運動に寄与する力を

$$M_A \ddot{z}_A^i = \int_A f_A^i d^3x + \int_A f_{-A}^i d^3x \quad (4.14)$$

と分けることができる。第一項が天体  $A$  自身の自己力、第二項が他の天体からの力である。

直観的に明らかなように、自己力は重心運動に寄与しない。圧力の寄与は、表面から表面まで積分すればいずれの成分も 0 になる。あるいは、Gauss の法則を用いて

$$-\int \nabla_i P dV = -\oint P n_i dS \quad (4.15)$$

としてもよい。重力による寄与は、時間依存性を省略して

$$-\int_A \rho(\mathbf{x}) \nabla_i \Phi_A(\mathbf{x}) d^3x = G \int_A \rho(\mathbf{x}) \nabla_i \int_A \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' d^3x \quad (4.16)$$

$$= -G \int_A \int_A (x - x')_i \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x d^3x' \quad (4.17)$$

と変形でき、被積分関数が  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{x}'$  について反対称であることからやはり 0 になる。

安直に考えれば、天体  $A$  の自己重力は典型的に  $\mathcal{O}(GM^2/R^2)$  で、他の天体からの重力は典型的に  $\mathcal{O}(GM^2/r^2)$  で与えられるので、重心運動にも自己重力の方が  $\mathcal{O}((r/R)^2)$  だけ大きく寄与して不思議ではなかった。もちろん、作用反作用の法則により自身の重力で重心運動が変化することは禁じられており、 $\mathcal{O}(GM^2/R^2)$  の自己重力は 0 になって  $\mathcal{O}(GM^2/r^2)$  の他天体による重力が支配的になる。上の計算で自己力が消えたことがそれを裏付けている。一見、自明なようであるが、ここには重力を作り出す「質量」と重力を感じる「質量」とが同じ質量であるという力学法則が反映されていることは、改めて確認する意義があろう。上記の (4.17) 式で言えば、 $\rho(\mathbf{x})$  は重力を感じる“passive”な質量の密度に、 $\rho(\mathbf{x}')$  は重力を作り出す“active”な質量の密度になっている。これらの性質は、例えば電磁気力など他の多くの力でも同じで、重力に特有の事情というわけではない。

自己力が消えるため、重心運動は

$$M_A \ddot{z}_A^i = -\delta^{ij} \int_A \rho \nabla_j \Phi_{-A} d^3x \quad (4.18)$$

に従う。右辺の支配的な項は、他の天体が質点として作るポテンシャル  $\sim GM/r$  と天体  $A$  の質量  $\sim M$  との相互作用で与えられ、積分すると力全体では  $\mathcal{O}(GM^2/r^2)$  になる。重心運動を質点系の軌道運動と扱ってよい精度はここに加わる補正の大ききで決まるが、以下でこれが安直に予想される  $\mathcal{O}(GM^2/r^2 \times (R/r)^2)$  ではなく、 $\mathcal{O}(GM^2/r^2 \times (R/r)^5)$  にしかならないことを見る。そのために、ポテンシャルを重心  $\mathbf{z}_A$  のまわりに Taylor 展開して

$$\Phi_{-A} = \sum_l \frac{1}{l!} (x - z_A)^L \mathcal{E}_L^A, \quad (4.19)$$

$$\mathcal{E}_L^A := \nabla_L \Phi_{-A} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{z}_A} \quad (4.20)$$

と書く。ここで  $l$  個の添字  $i_1 \dots i_l$  を  $L$  とまとめ、また  $(x - z_A)^L := \prod_i (x - z_A)^{i_i}$ ,  $\nabla_L := \prod_i \nabla_{i_i}$  とした。他の天体の作るポテンシャルは天体  $A$  の位置で Laplace 方程式  $\nabla^2 \Phi_{-A} = 0$  を満たすため、 $\mathcal{E}_L^A$  は任意の添字 2 つについて縮約を取ると消える、言い換えればトレースレスである。そのため重力ポテンシャル  $\Phi_{-A}$  の展開においても  $(x - z_A)^L$  を、添字  $L$  について任意の組での縮約が消える、トレースレスの部分で置き換えて構わない<sup>\*1</sup>。テンソルの対称トレースレス部分を例えば  $(x - z_A)^{\langle L \rangle}$  のように表すことにすると、重心運動の従う運動方程式は換算多重極モーメント (reduced multipole moment)

$$\mathcal{I}_A^L(t) := \int_A \rho(t, \mathbf{x}) (x - z_A)^{\langle L \rangle} d^3x \quad (4.22)$$

\*1 一般的な表記は煩雑になるので避けるが、例えば

$$(x - z_A)^i (x - z_A)^j \rightarrow (x - z_A)^i (x - z_A)^j - \frac{1}{3} |\mathbf{x} - \mathbf{z}_A|^2 \delta^{ij} \quad (4.21)$$

として構わないということ。

を用いて

$$M_A \ddot{z}_i^A = - \sum_l \frac{1}{l!} \mathcal{I}_A^L \mathcal{E}_{iL}^A \quad (4.23)$$

とまとめることができる。(右辺との整合性のために添字を下げたが、直交座標なのでほぼ形式上だけのことである。)

右辺の無限和では、 $l$ が大きくなると $\mathcal{I}_A^L$ には $\sim R$ がかかり、 $\mathcal{E}_{iL}^A$ には $\sim 1/r$ がかかるため、 $l$ の小さい項が支配的になると期待される。具体的に最初の方の項を書き下すにあたり、 $l=1$ の質量双極子 $D_A^i = \mathcal{I}_A^i$ は重心の定義により0になるので、 $l=0$ の質量 $M_A = \mathcal{I}_A$ および $l=2$ の換算四重極 $Q_A^{ij} = \mathcal{I}_A^{ij}$ を用いて

$$M_A \ddot{z}_i^A = -M_A \mathcal{E}_i^A - \frac{1}{2} Q_A^{jk} \mathcal{E}_{ijk}^A + \mathcal{O}\left(\frac{GM^2}{r^2} \times \frac{R^3}{r^3}\right) \quad (4.24)$$

とできる。与えられた重力ポテンシャルに対し、 $l=0$ の右辺第一項は天体 $A$ が質点として相互作用する最も支配的な寄与を表す。ここで左辺に現れる慣性質量と右辺に現れる重力質量とが同じ質量 $M_A$ になるのは、次節で改めて述べる(弱い)等価原理を反映している。一方、天体 $A$ が広がりを持った流体である影響は $l=2$ の右辺第二項に反映され、段落冒頭の考察より、安直には $l=0$ に対して $\mathcal{O}((R/r)^2)$ の補正を与えると期待される。しかし、球対称形状では対称性により $l>0$ の $\mathcal{I}_A^L$ が全て0になっているため、補正はより小さく収まる。ここで注目する換算四重極モーメントは、 $\mathcal{O}(GM^2/R^3)$ の自己重力に対する、 $\mathcal{O}(GM^2 R/r^3)$ の外部天体による潮汐力の比率程度に誘起され、 $Q_A^{ij} \propto (R/r)^3$ となる\*2。そのため、天体 $A$ の内部構造が運動に及ぼす影響は、質点相互作用に比べて $\mathcal{O}((R/r)^5)$ でしか効かない。

他の天体でも同様に換算多重極モーメントが抑えられるため、他の天体が広がりを持った流体である影響も $\mathcal{O}((R/r)^5)$ でしか効いてこない。それを示すには、 $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ を各々の重心のまわりにTaylor展開し、他の天体が作る重力ポテンシャル $\Phi_{-A}$ も換算多重極モーメントで表せることを見るのがよい。具体的には

$$\Phi_{-A}(t, \mathbf{x}) = -G \sum_{B \neq A} \int_B \frac{\rho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \quad (4.25)$$

$$= -G \sum_{B \neq A} \int_B \sum_l \frac{1}{l!} \rho(t, \mathbf{x}') (x' - z_B)^L \nabla'_L \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \Big|_{\mathbf{x}' = \mathbf{z}_B} d^3 x' \quad (4.26)$$

$$= -G \sum_{B \neq A} \int_B \sum_l \frac{(-1)^l}{l!} \rho(t, \mathbf{x}') (x' - z_B)^L \nabla_L \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}_B|} d^3 x' \quad (4.27)$$

$$= - \sum_{B \neq A} \sum_l \frac{(-1)^l}{l!} G \mathcal{I}_B^L(t) \nabla_L \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}_B|} \quad (4.28)$$

$$= - \sum_{B \neq A} \left( \frac{GM_B}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}_B|} + \frac{G}{2} Q_B^{ij} \nabla_i \nabla_j \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}_B|} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{GM}{r} \times \frac{R^3}{r^3}\right) \quad (4.29)$$

とできる。ここで第二行の $\nabla'_i$ は $\mathbf{x}'$ に関する微分演算子で、第三行に移る際には微分される関数が $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ なので $\nabla'_i$ を $-\nabla_i$ で置き換えられることを用い、さらにこの置き換えの後にはもはや微分されない $\mathbf{x}'$ に $\mathbf{z}_B$ を代入した。最後の具体的に書き下した表式において、第二項は第一項に対し $\mathcal{O}((R/r)^5)$ の補正しかもたらさないことは、先に述べたのと同じ事情により $Q_B^{ij} \propto (R/r)^3$ であることから従い、段落冒頭の主張が確かめら

\*2 一般的には $\mathcal{I}_A^L \propto (R/r)^{l+1}$ となる。詳細に興味がある場合はこの章冒頭に提示した pdf を参照されたい。また、天体が自転しているなどの事情により最初から $\mathcal{I}_A^L \neq 0$ である場合、その大きさの範囲では安直に期待されると言った次数の寄与が存在する。

れる。また、この表式を用いれば  $\mathcal{E}_L^A = \nabla_L \Phi_{-A}$  を換算多重極モーメントで表すことができ、重心の運動方程式は最終的に

$$M_A \ddot{z}_i^A = \sum_{B \neq A} \sum_l \sum_{l'} \frac{(-1)^{l'}}{l!l'!} G \mathcal{I}_A^L(t) \mathcal{I}_B^{L'}(t) \nabla_{iLL'} \frac{1}{|\mathbf{z}_A - \mathbf{z}_B|} \quad (4.30)$$

$$= \sum_{B \neq A} \left[ GM_A M_B \nabla_i \frac{1}{|\mathbf{z}_A - \mathbf{z}_B|} + \frac{G}{2} (M_A \mathcal{Q}_B^{jk} + M_B \mathcal{Q}_A^{jk}) \nabla_i \nabla_j \nabla_k \frac{1}{|\mathbf{z}_A - \mathbf{z}_B|} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{GM^2}{r^2} \times \epsilon \frac{R^3}{r^3}\right) \quad (4.31)$$

と書き下せる\*3。ここで、 $\epsilon$  は高次の換算多重極モーメントも抑えられていることを表すために導入した微小量である。

まとめると、流体からなる天体の重心運動は  $\mathcal{O}((R/r)^5)$  という非常に高い精度で質点系の軌道運動により近似できる。この事情を、一般相対論の文脈でしばしば“effacement principle”と呼ぶ（が、もちろん原理ではない）。

### 4.3 流体運動 (internal problem)

次に天体 A 内部の、重心に対する相対的な流体運動を考え、他の天体の及ぼす重力の寄与が小さいことを見る。重心を基準とした座標

$$y_A^i := x^i - z_A^i(t), \quad (4.32)$$

$$w_A^i := v^i - \dot{z}_A^i(t) \quad (4.33)$$

を導入すると、重心系が非慣性系であることも踏まえ、Euler 方程式は

$$\frac{\partial v^i(t, \mathbf{x})}{\partial t} + v^j \frac{\partial v^i(t, \mathbf{x})}{\partial x^j} \quad (4.34)$$

$$= \left[ \frac{\partial t}{\partial t} \frac{\partial w_A^i(t, \mathbf{y}_A)}{\partial t} + \frac{\partial y_A^j(t, \mathbf{x})}{\partial t} \frac{\partial w_A^i(t, \mathbf{y}_A)}{\partial y_A^j} \right] + \ddot{z}_A^i + (w_A^j + \dot{z}_A^j) \left[ \frac{\partial t}{\partial x^j} \frac{\partial w^i(t, \mathbf{y}_A)}{\partial t} + \frac{\partial y_A^k(t, \mathbf{x})}{\partial x^j} \frac{\partial w_A^i(t, \mathbf{y}_A)}{\partial y_A^k} \right] \quad (4.35)$$

$$= \frac{\partial w_A^i}{\partial t} + w_A^j \frac{\partial w_A^i}{\partial y_A^j} + \ddot{z}_A^i \quad (4.36)$$

によって書き直せる。これは  $w_A^i$  に対する空間偏微分が  $\mathbf{y}_A$  で行われることに注意すれば

$$\frac{dw_A^i}{dt} = \frac{dv^i}{dt} - \ddot{z}_A^i \quad (4.37)$$

と、Lagrange 微分を用いて簡潔に表すこともできる。右辺第二項は単位質量あたりの慣性力を意味する。

慣性力を (4.14) 式を用いて書き換えると、既に自己力の積分は消えることを確認したので、流体の内部運動を支配する Euler 方程式が

$$\rho \left( \frac{\partial w_A^i}{\partial t} + w_A^j \frac{\partial w_A^i}{\partial y_A^j} \right) = f_A^i + f_{-A}^i - \rho \ddot{z}_A^i \quad (4.38)$$

\*3 これを解くためには  $\mathcal{Q}^{ij}$  など高次の換算多重極モーメントの発展方程式が必要である。換算四重極モーメントについてはやはり冒頭に提示の pdf を参照のこと。

$$= f_A^i + f_{-A}^i - \frac{\rho}{M_A} \int_A f_{-A}^i d^3 y' \quad (4.39)$$

となることはすぐわかる。内部運動においては自己力の密度  $f_A^i$  が支配的であり、特に自己重力からは  $\mathcal{O}(GM^2/R^5)$  の寄与がある。星  $A$  が近似的な平衡形状にあれば、圧力勾配力の寄与も同程度である。一方、外部重力および外部重力に由来する慣性力を合わせた力は潮汐力を意味し、

$$f_i^{-A} - \frac{\rho(t, \mathbf{y}_A)}{M_A} \int_A f_i^{-A}(t, \mathbf{y}') d^3 y' \quad (4.40)$$

$$= -\rho(t, \mathbf{y}_A) \sum_l \frac{1}{l!} y_A^L \mathcal{E}_{iL}^A + \frac{\rho(t, \mathbf{y}_A)}{M_A} \int_A \rho(t, \mathbf{y}') \sum_l \frac{1}{l!} y'^L \mathcal{E}_{iL}^A d^3 y' \quad (4.41)$$

$$= -\rho(t, \mathbf{y}_A) \sum_l \frac{\mathcal{E}_{iL}^A}{l!} \left( y_A^L - \frac{T_A^L}{M_A} \right) \quad (4.42)$$

$$= -\rho(t, \mathbf{y}_A) y_A^j \mathcal{E}_{ij}^A - \frac{1}{2} \rho(t, \mathbf{y}_A) \left[ y_A^j y_A^k - \frac{Q_A^{jk}}{M_A} \right] \mathcal{E}_{ijk}^A + \mathcal{O} \left( \frac{GM^2}{R^3 r^2} \times \frac{R^3}{r^3} \right) \quad (4.43)$$

と変形できる。ここで  $l=0$  の寄与は外力と慣性力とで相殺し、 $l=1$  のうち慣性力による分は重心の定義  $D_A^i = 0$  のために消える。よって  $l=1$  のうち直接の外部重力による分が  $\mathcal{O}(GM^2/R^5 \times (R/r)^3)$  の支配的な潮汐力を与え、自己重力に比べると  $\mathcal{O}((R/r)^3)$  だけ抑えられていることがわかる。ここでは本来は  $l=0$  の寄与により  $\mathcal{O}((R/r)^2)$  の補正があっただけでなく、 $f_{-A}^i = -\rho \nabla^i \Phi_{-A}$  に現れる “passive” な質量の密度と、 $\rho \ddot{z}_A^i$  に現れる “inertial” な質量の密度とが等しいため、 $R/r$  だけ余分に抑えられている。重力質量と慣性質量とが等しいという事実は質点の初等力学でもよく知られた等価原理であり、特に現代的な等価原理の分類の中では弱い等価原理と呼ばれる\*4。これは重力に特有の性質であり、例えば等量の電子・陽電子プラズマでできた球を電場の中に置いた状況を想像してみると、違いが明らかになるだろう。

\*4 他に Einstein の等価原理、強い等価原理がある。この点を含め、重力理論の検証については例えば C. M. Will, LRR 17, 4 (2014) などが詳しい。

## 第 5 章

# 質点系の運動：天体力学

重力相互作用する天体系の運動は、少なくない場合に 2 質点間の Kepler 運動の組み合わせとして良く近似できる。例えば太陽系の質量はほとんどが太陽にあり、系内の惑星は概ね各々が太陽との Kepler 軌道にあるとみなせる。しかし長期的な運動を考えると、2 体問題からの差異が蓄積して大きな違いを生み出しうる。例えば地球は回転楕円体なので四重極モーメントによって自転軸は歳差運動を起こし、また系内の惑星の軌道は他の惑星からの重力も受けて純粋な Kepler 軌道から変化する。これら以外に特筆すべき現象として、一般相対論効果による微小な近日点移動が水星の運動から確かめられたことは有名である。この章ではまず天体物理における Kepler 軌道の記述法を整理した後に、微小な摂動の積み重ねを見通しよく議論するための永年摂動論を導入し、いくつかの効果を見る。

この章の議論は

1. 須藤靖「解析力学・量子論」(東京大学出版会)
2. Goldstein, Poole, Safko “Classical Mechanics” (Pearson)
3. Poisson, Will “Gravity” (Cambridge University Press)

を参考にしている。

### 5.1 Kepler 運動

まずは重力のみで相互作用する 2 質点  $m_1, m_2$  の軌道運動である Kepler 運動を概観する。重力ポテンシャルは相対位置にのみ依存するので、重心運動は相対運動から分離でき、以下では省略する。相対位置を  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  とし、全質量  $M = m_1 + m_2$  および換算質量<sup>\*1</sup>  $\mu = m_1 m_2 / M$  を用いると、この系は保存量として

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{J^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{J} = \mu \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (5.3)$$

---

\*1 本来は

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (5.1)$$

と見た方が意味が明確で、このときは多体系への拡張も容易になる。



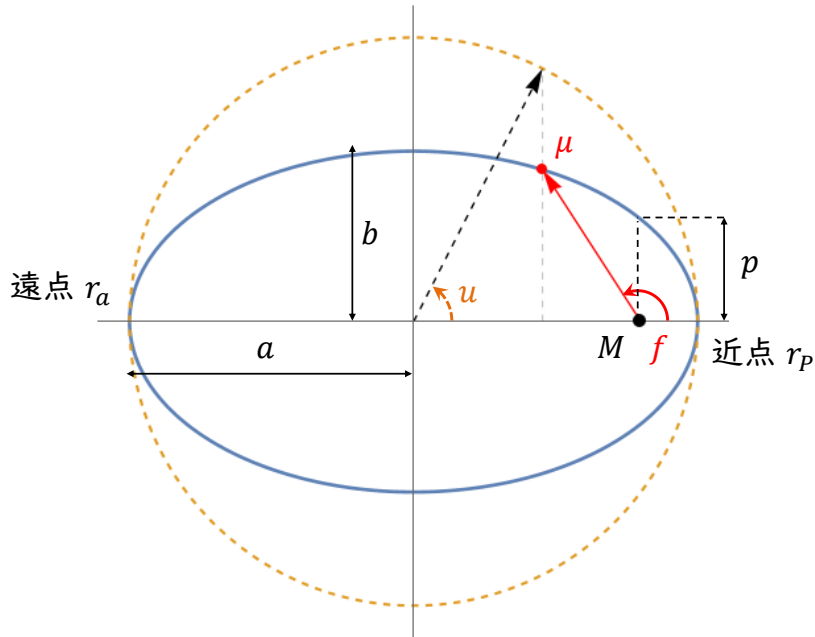


図 5.1 軌道面上で見た Kepler 軌道（離心率 0.8）。この図では楕円の右側の焦点に質量  $M$  の動かない重力源があり、楕円上を質量  $\mu$  の天体が運動している。近点から天体までの角度が true anomaly  $f$  である。一般の質量の連星に対してはこの楕円軌道はあくまで相対運動に着目したときの軌道だが、 $M \gg \mu$  の連星であれば実際の軌道とみなせる。外接円は仮想的なもので、eccentric anomaly  $u$  を図形的に解釈するために記した。

を持つ\*2。角運動量の保存は中心力の一般的な性質であり重力に特有の話ではないが、Kepler の第二法則としてよく知られており、連星の運動がそれに直交する平面内でのみ行われることを保証する。

### 5.1.1 軌道面内の運動

軌道運動を記述するためだけであれば、軌道面を球座標における赤道面、つまり  $\theta = \pi/2$  に取って一般性を失わず、軌道角運動量の大きさは  $J = \mu r^2 |\dot{\varphi}|$  と表せる。このとき  $\dot{\varphi}$  の符号は変化しないので、 $J = 0$  の落下運動を除けばやはり一般性を失わず正に取ることができ、この場合には方位角  $\varphi$  は増え続ける。以下、5.1.1 節ではこれらの設定に則り、軌道の性質を把握する。

エネルギーが動径座標  $r$  の、角運動量が方位角  $\varphi$  の時間発展を記述するので、軌道  $r(\varphi)$  はこれらを組み合わせた

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \pm \frac{\mu r^2}{J} \sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E + \frac{GM\mu}{r} - \frac{J^2}{2\mu r^2} \right)} \quad (5.4)$$

によって定まる。符号の正負はそれぞれ近点から遠点に向かって  $r$  が増える場合、遠点から近点に向かって  $r$  が減る場合に対応する。この微分方程式は積分変数を  $1/r$  に変換し、平方完成することで

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \omega)}, \quad (5.5)$$

\*2 他に Laplace-Runge-Lenz ベクトルが保存し、近点の方向が変わらないことを保証するが、ここでは直接関係ないので割愛する。

$$p := \frac{J^2}{GM\mu^2}, \quad (5.6)$$

$$e := \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{G^2M^2\mu^3}} \quad (5.7)$$

と解くことができ、 $p$  は半通径 (semi-latus rectum)、 $e$  は離心率 (eccentricity) と呼ばれる。この軌道  $r(\varphi)$  は、図 5.1 に示すように重力源  $M$  の位置を一つの焦点とした楕円となっており、Kepler の第一法則を裏付けている。また積分定数  $\omega$  は  $\varphi = \omega$  が

$$r = r_p := \frac{p}{1+e} \quad (5.8)$$

の近点を与えるように選んでおり、近点引数 (argument of periapsis) と呼ばれる\*<sup>3</sup>。天体力学の文脈では、近点を基準とした角度  $f := \varphi - \omega$  を true anomaly (真近点角) と呼ぶ。ここまでの議論は  $E < 0$  の束縛系、 $E > 0$  の非束縛系のいずれにも当てはまり、それぞれ離心率では  $e < 1$ ,  $e > 1$  に対応している。

以降、束縛系のみを考える。物理的に妥当な解では離心率が実数であることが要請され、 $0 \leq e < 1$  が束縛軌道を与える。これはエネルギーに

$$-\frac{G^2M^2\mu^3}{2J^2} \leq E < 0 \quad (5.9)$$

なる条件が課されることを意味しており、特に  $e = 0$  の円軌道は与えられた角運動量の下での最低エネルギー状態である。一方  $0 < e < 1$  は楕円軌道で、 $\varphi = \omega + \pi$  は  $r = r_a := p/(1-e)$  の遠点に対応する。半通径  $p$  の代わりに近点距離  $r_p$  や遠点距離  $r_a$  など他の量を用いても軌道の特徴づけることができ、とりわけエネルギーのみで定まる軌道長半径

$$a := \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{p}{1-e^2} = \frac{GM\mu}{2(-E)} \quad (5.10)$$

は頻繁に用いられ、半通径の代わりにこちらを用いれば角運動量は

$$J = \mu\sqrt{GMa(1-e^2)} \quad (5.11)$$

と表される。他に、軌道短半径

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = a\sqrt{1-e^2} \quad (5.12)$$

は  $\cos(\varphi - \omega) = -e$  において得られる  $r \sin(\varphi - \omega)$  の極値として導くことができ、これも時折用いられる。

運動を陽に時間の関数  $r = r(t)$  として表すことはできないが、代わりに eccentric anomaly (離心近点角)  $u$  を用いたパラメータ表示が有用である。動径座標の時間発展はエネルギー保存から与えられ、 $E, J$  を  $a, e$  で書き換えると

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{\sqrt{a^2e^2 - (a-r)^2}}{r}} \quad (5.13)$$

となる。ここで

$$r = a(1 - e \cos u) \quad (5.14)$$

により  $r$  を eccentric anomaly  $u$  に変換すると

$$\frac{dt}{du} = \sqrt{\frac{a^3}{GM}} (1 - e \cos u) \quad (5.15)$$

\*<sup>3</sup> 今の議論では単に近点が  $\varphi = 0$  となるように座標軸を選ぶ、としてもよいが、後で必要になるので残した。

を積分でき、 $u = 0$  となる近点通過時刻  $t_0$  を積分定数として

$$l := n(t - t_0) = u - e \sin u, \quad (5.16)$$

$$n := \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \quad (5.17)$$

を得る。ここで  $l$  は mean anomaly (平均近点角)、 $n$  は mean motion (平均運動) と呼ばれ、(5.16) 式は Kepler 方程式と呼ばれる\*4。このパラメータ表示を通して  $u(t)$  を得れば

$$r = a(1 - e \cos u) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (5.18)$$

などを介して  $r(t)$  や  $f(t)$ 、また  $\varphi(t) = f(t) + \omega$  などを得ることが<sup>3</sup>できる。他に有用な関係として

$$\cos f = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}, \quad (5.19)$$

$$\sin f = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin u}{1 - e \cos u}, \quad (5.20)$$

$$\tan\left(\frac{f}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan\left(\frac{u}{2}\right) \quad (5.21)$$

などが導けるので、併せてここに記しておく。

ここで登場した3つの anomaly  $f, u, l$  は、軌道天体の位置を周期  $2\pi$  で、それぞれ別のやり方により指定するための角度とみなすことができる。実際の位置を示す角度が true anomaly  $f$  である。パラメータとして導入された eccentric anomaly  $u$  は、図形的には図 5.1 のように解釈できる。言葉で言えば、楕円軌道に外接する円の上で、軌道長軸に射影したときの位置が軌道天体と一致する点の、近点方向を基準として外接円の中心から測った角度である。Kepler 方程式で導入された mean anomaly  $l$  は、mean motion  $n$  を一定の角速度として増え続ける、時間に対応する角度である。その周期が  $2\pi$  であることから軌道周期  $P$  は

$$P = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \quad (5.22)$$

と軌道長半径  $a$  にのみ依存していることがわかり、特に  $P^2 \propto a^3$  は Kepler の第三法則である。円軌道ではこれらは全て一致して  $f = u = l$  となる。

以上をまとめると、全質量  $M$  および換算質量  $\mu$  の系が軌道面内で行う楕円運動は

1. 軌道の大きさを定める軌道長半径  $a$  (これはエネルギー  $E$  で決まる)
2. 軌道の形を定める軌道離心率  $e$  (これはエネルギー  $E$  および全角運動量  $J$  で決まる)
3. 軌道の向きを定める近点引数  $\omega$
4. 時間の原点を定める近点通過時刻  $t_0$

の4つのパラメータによって指定できる。時間の関数として運動を表すには、 $t$  から mean anomaly  $l$  を求め、Kepler 方程式により eccentric anomaly  $u$  を陰に得ることで、true anomaly  $f$  や  $(r, \varphi)$  を定めればよい。

### 5.1.2 3次元空間での軌道の指定

我々が外部から天体運動を観測する場合を含め、2質点以外の登場人物がいる場合は、最初から軌道面を  $\theta = \pi/2$  に取る座標系が有用とは限らない。特に実際の観測を考える際は、地球の赤道面や見かけ上太陽が動

\*4 Bessel 関数はこの方程式を解いて  $u = u(t)$  を得るために開発された (らしい)。

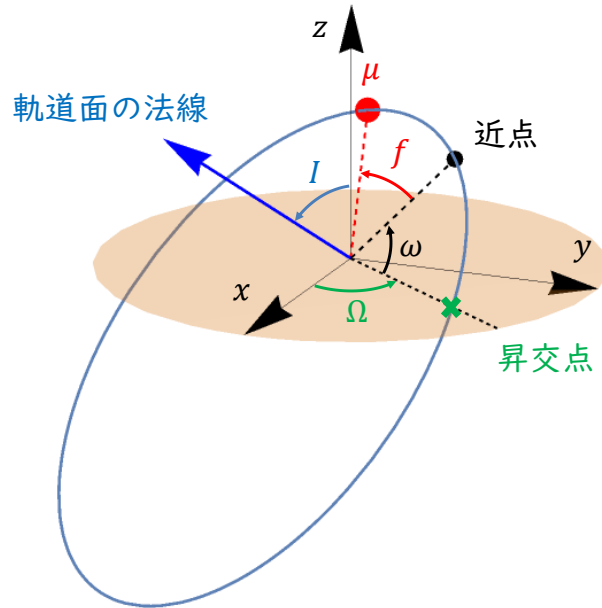


図 5.2 一般の座標系における Kepler 軌道 (離心率 0.5)。原点には重力源  $M$  があるが省略しており、半透明な橙色の楕円は基準面である  $xy$  平面の一部を描画している。基準面に直交する  $z$  軸から軌道面の法線までの角度が軌道傾斜角  $I$  (青)、 $x$  軸から昇交点を通る基準面内の線までの角度が昇交点経度  $\Omega$  (緑) で、この線から近点方向までの軌道面内で測った角度が近点引数  $\omega$  (黒)。近点から天体  $\mu$  までの軌道面内で測った角度  $f$  (赤) は true anomaly である。

く黄道面を基準として、個別の天体とは独立な座標系を用意しておくことが多くの場合にむしろ有用である。このとき、個々の天体ないし連星の Kepler 軌道を指定するには、この座標系の中で Kepler 軌道の向きを指定する必要がある。以降、この独立な座標系を  $xyz$  座標系と呼ぶことにする。

一般の座標系における Kepler 軌道は、図 5.2 に示す角度を用いて定められる。まずは  $xyz$  座標系における軌道面の向きを、軌道面の法線を定める二つの角度を与えることで指定する。角度の一つは  $z$  軸と軌道面の法線との間の角度で、軌道傾斜角 (inclination angle) と呼ばれ  $I$  で表される<sup>\*5</sup>。もう一つは質量  $\mu$  の軌道天体が  $z < 0$  から  $z > 0$  に切り替わる点である昇交点 (ascending node) の  $x$  軸からの角度で、昇交点経度 (longitude of ascending node) と呼ばれ  $\Omega$  で表される。このように軌道面が指定されたら、後は軌道長半径  $a$ 、軌道離心率  $e$  に加え近点の方向が決まれば楕円軌道は完全に指定される。それには昇交点から近点までの角度を与えればよく、ここではこの角度を近点引数  $\omega$  と呼ぶ。この一連の定め方は、近点が  $x$  軸正方向を向いた  $xy$  平面内の楕円軌道を、 $z$ - $xz$ -convention により Euler 角  $(I, \Omega, \omega)$  で回転したことに対応する。

このように、一般の座標系における Kepler 運動は、近点通過時刻  $t_0$  も含めて Kepler 軌道要素と呼ばれる 6 つの定数

$$a, e, I, \Omega, \omega, t_0$$

によって表せる。軌道天体  $\mu$  の位置を指定するには、方位角  $\varphi$  はもはや有用ではなく、近点から測った軌道面内の角度である true anomaly  $f$  が主に用いられる。Euler 角によって座標を回転すれば、あるいは図形的

<sup>\*5</sup> 同じ量を  $i$  で表す流儀も広く用いられている。

な考察によっても、軌道天体の  $xyz$  座標は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f} \begin{pmatrix} \cos\Omega \cos(\omega+f) - \cos I \sin\Omega \sin(\omega+f) \\ \sin\Omega \cos(\omega+f) + \cos I \cos\Omega \sin(\omega+f) \\ \sin I \sin(\omega+f) \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

と Kepler 軌道要素および true anomaly  $f$  で表せる。パラメータ表示である eccentric anomaly  $u$  や時間に対応する mean anomaly  $l$  は変更を受けず引き続き用いられる。

## 5.2 接触軌道法

他の天体の重力などの影響が加わると、2 質点間の軌道運動はもはや Kepler 運動ではなくなる。質点間の重力以外も受ける 2 質点あるいは質点系の運動は、原理的には加わった影響を取り入れた運動方程式を解いて位置の時間変化を求めれば記述できるが、これは一般に複雑であり、物理的な理解を得ることも容易でない。そこで、大抵の効果は 2 質点間の Kepler 運動への微小な影響とみなせることを踏まえ、瞬間瞬間ではそのときの位置・速度で定まる Kepler 運動をしているが、摂動的な影響が加わり続けることで平均的な軌道要素がゆっくり変化すると考える「接触軌道法」を用いる。この名前は、考える Kepler 軌道が各瞬間の軌道に接するものであることに由来する。そのために、まずは Hamilton-Jacobi 法によって摂動を扱うのに適した形で Kepler 運動を記述し、さらに変数を Delaunay 軌道要素に取り替えてから<sup>\*6</sup>、摂動を取り入れるための Lagrange の惑星方程式を導く。

### 5.2.1 Hamilton-Jacobi 法による Kepler 運動の記述

Hamilton-Jacobi 法によって Kepler 運動を解くと、運動の定数となる正準座標および正準運動量は Kepler 軌道要素によって表される。この問題の Hamilton-Jacobi 方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2\mu} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right] - \frac{GM\mu}{r} = 0 \quad (5.24)$$

に対し、変数分離型の解

$$S(t, r, \theta, \varphi) = S_t(t) + S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_\varphi(\varphi) \quad (5.25)$$

を探すことを考えると、まず方程式に  $t, \varphi$  が表れないことからほぼ自明に  $S_t(t) = -\alpha_t t$ ,  $S_\varphi(\varphi) = \alpha_\varphi \varphi$  とできる。すると分離定数  $\alpha_\theta^2$  を

$$\left( \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2 \theta} = \alpha_\theta^2, \quad (5.26)$$

$$\left( \frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} = 2\mu \left( \alpha_t + \frac{GM\mu}{r} \right) \quad (5.27)$$

と定められ、後はこれらを解いて  $S_r, S_\theta$  を求めれば Hamilton の主関数  $S(t, r, \theta, \varphi)$  が得られる。自乗を外すにあたり、通過後に  $r$  が増加する近点を基準に取ることから  $S_r$  については正符号を、 $\theta$  が減少する昇交点を

<sup>\*6</sup> これは本来なら作用角変数として導く方が論理的には素直だが、 $1/r$  ポテンシャルの場合は 3 次元全ての振動数が縮退して取り扱いがやや複雑になるため、ここでは避けた。

基準に取ることから  $S_\theta$  については負符号を取ることによれば、解として

$$S(t, r, \theta, \varphi) = -\alpha_t t + \alpha_\varphi \varphi - \int \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta + \int \sqrt{2\mu \left( \alpha_t + \frac{GM\mu}{r} \right) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}} dr \quad (5.28)$$

を得る。これらの具体的な積分も可能だが、ここでは必要ないので行わない。

この  $S(t, r, \theta, \varphi)$  を母関数として正準変換すれば Hamiltonian は 0 になり、正準運動量  $P_1 = \alpha_t$ ,  $P_2 = \alpha_\theta$ ,  $P_3 = \alpha_\varphi$  および正準座標  $Q^1, Q^2, Q^3$  が定数となる系に移れる。ここではその前に、正準運動量  $P_1, P_2, P_3$  を元の変数で表した表式に Kepler 軌道の知識を援用して、その物理的な意味を確認する。まず  $P_3$  は  $\varphi$  方向の角運動量  $p_\varphi$  であり、これは角運動量の  $z$  成分  $J_z$  に対応する。Kepler 運動の角運動量は (5.11) 式で与えられ、今は軌道面が傾いていることを併せて考えると、Kepler 軌道要素を用いれば

$$P_3 = \mu \sqrt{GMa(1-e^2)} \cos I \quad (5.29)$$

と表せる。次に  $P_2$  は (5.26) 式から

$$P_2 = \alpha_\theta = \sqrt{p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta}} \quad (5.30)$$

と表せることがわかり、これは全角運動量  $J$  である。よって、Kepler 軌道要素では

$$P_2 = \mu \sqrt{GMa(1-e^2)} \quad (5.31)$$

となる。最後に  $P_1$  は変換前の Hamiltonian そのものであり、これはエネルギー  $E$  に対応するので、Kepler 軌道要素では

$$P_1 = -\frac{GM\mu}{2a} \quad (5.32)$$

と表される。こうして、新たな正準運動量は全て素性の明らかな保存量であることが確認できた。Kepler 軌道要素の関数として見れば  $P_1$  は  $a$  のみに、 $P_2$  は  $(a, e)$  に、 $P_3$  は  $(a, e, I)$  に依存している。Hamilton-Jacobi 法で変換された正準運動量  $P_i$  は全て定数となるので、逆に上で導いた式から  $a, e, I$  を定義すればもちろん定数となる。Kepler 軌道の知見を前提とせず、この理路に従って Kepler 軌道要素を導入することも（論理的な必然性はともかく）可能である。

本筋に戻って新たな正準座標  $Q^i = \partial S / \partial P_i$  を計算し、これも Kepler 軌道要素と対応させて意味を見出す。まず、動径座標を eccentric anomaly により  $r = a(1 - e \cos u)$  と表せば

$$Q^1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_t} = -t + \int \frac{\mu}{\sqrt{2\mu(\alpha_t + GM\mu/r) - \alpha_\theta^2/r^2}} dr \quad (5.33)$$

$$= -t + \sqrt{\frac{a}{GM}} \int \frac{r}{\sqrt{-r^2 + 2ar - a^2(1-e^2)}} dr \quad (5.34)$$

$$= -t + \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \int (1 - e \cos u) du \quad (5.35)$$

$$= -t + \sqrt{\frac{a^3}{GM}} (u - e \sin u) \quad (5.36)$$

が得られる。これを变形すると、mean motion  $n$  を用いて

$$n(t + Q^1) = u - e \sin u \quad (5.37)$$

とでき、 $Q^1$  を近点通過時刻の負符号  $-t_0$  とみなしたときに Kepler 方程式 (5.16) を与えていることがわかる。次元を考えれば当然だが、直観的にもエネルギーの共役量は時間に関する定数のはずなので、近点通過時刻が出てくることは自然に期待される。次に  $z/r$  の球座標での表式と軌道要素による表式とを等置した  $\cos \theta = \sin I \sin(\omega + f)$  を用い、動径座標は true anomaly により  $r = a(1 - e^2)/(1 + e \cos f)$  と表すと

$$Q^2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\theta} = - \int \frac{\alpha_\theta}{\sqrt{\alpha_\theta^2 - \alpha_\varphi^2 / \sin^2 \theta}} d\theta - \int \frac{\alpha_\theta}{r^2 \sqrt{2\mu(\alpha_t + GM\mu/r) - \alpha_\theta^2 / r^2}} dr \quad (5.38)$$

$$= - \int \frac{\sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta^2 - \cos^2 I}} d\theta - \int \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{r^2 \sqrt{-1 + 2a/r - (1 - e^2)a^2/r^2}} dr \quad (5.39)$$

$$= \int d(\omega + f) - \int df \quad (5.40)$$

$$= \omega \quad (5.41)$$

が得られる。ここから、全角運動量  $P_2 = J$  の共役量である  $Q^2$  は近点引数  $\omega$  を与えることがわかる。軌道面の法線まわりの回転角として、特に近点を基準に取って母関数を定めたことから、近点引数  $\omega$  が出てくるのは自然であろう。ただしここでは第一項の変形において積分変数を  $\omega + f$  全体に取り直しているが、付加定数は任意に選ぶこともできるので、やや不自然な変換をすれば別の点を基準とすることも可能である。最後に、軌道天体  $\mu$  方向の単位ベクトル  $(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$  と軌道面の法線ベクトル  $(\sin I \sin \Omega, -\sin I \cos \Omega, \cos I)$  とが直交することから従う  $1/(\tan I \tan \theta) = \sin(\varphi - \Omega)$  を用いて\*7

$$Q^3 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\varphi} = \varphi + \int \frac{\alpha_\varphi}{\sin^2 \theta \sqrt{\alpha_\theta^2 - \alpha_\varphi^2 / \sin^2 \theta}} d\theta \quad (5.42)$$

$$= \varphi + \int \frac{\cos I}{\sin^2 \theta \sqrt{1 - \cos^2 I / \sin^2 \theta}} d\theta \quad (5.43)$$

$$= \varphi - \int d(\varphi - \Omega) \quad (5.44)$$

$$= \Omega \quad (5.45)$$

が得られる。つまり、角運動量の  $z$  成分  $P_3 = J_z$  の共役量である  $Q^3$  は昇交点経度  $\Omega$  を与える。これもやはり  $z$  軸まわりの回転角を考えると、昇交点を基準に取った以上は昇交点経度  $\Omega$  が出てくるのが自然であろう。ただし、ここでも第二項の積分変数は  $\varphi - \Omega$  全体に取り直している。正準運動量と場合と同様の議論により、これら新たな正準座標を用いて Kepler 軌道要素  $t_0, \omega, \Omega$  を定義することも可能である。

以上のように、新たな座標  $Q^1 = -t_0, Q^2 = \omega, Q^3 = \Omega$  は全て Kepler 軌道要素であり、新たな運動量  $P_1 = E, P_2 = J, P_3 = J_z$  も Kepler 軌道要素  $a, e, I$  で定まる。ここでは Hamilton-Jacobi 法を用いたので、Kepler 軌道要素が時間変化しないことも別の見方で再確認できる。

## 5.2.2 Delaunay 軌道要素

Hamilton-Jacobi 法で得られる正準変数は全てが定数となるため摂動の影響を見やすいが、実用上は各時刻での天体の場所を指定する変数を含む方が望ましい面もある。その中で特に Delaunay 軌道要素は、近点通過時刻である  $Q^1 = -t_0$  を角度である mean anomaly  $l$  に変換することで得られ、天体力学の摂動論で頻繁に用

\*7 おそらく  $\sin \theta$  はこの形で残すのが最も変形しやすい。

いられる。それには対応する正準運動量をエネルギーの  $P_1$  から角運動量の次元を持った量に取り替える必要があり、これは変換後の正準運動量を  $J_i$  として母関数

$$W(t, Q^i, J_i) = -\frac{G^2 M^2 \mu^3}{2(J_1)^2} (t + Q^1) + Q^2 J_2 + Q^3 J_3 \quad (5.46)$$

によって行われる。この変換では、変換前の正準運動量  $P_1 = -GM\mu/(2a)$  が

$$P_1 = \frac{\partial W}{\partial Q^1} = -\frac{G^2 M^2 \mu^3}{2(J_1)^2} \quad (5.47)$$

となることから

$$J_1 = \mu\sqrt{GMa} \quad (5.48)$$

が従い、変換後の正準運動量  $J_1$  は軌道長半径  $a$  の仮想的な円軌道が持つ軌道角運動量だと解釈できる。変換後の正準座標を  $w^i$  で表すことにすると、 $J_1$  に対応する正準座標は

$$w^1 = \frac{\partial W}{\partial J_1} = \frac{G^2 M^2 \mu^3}{(J_1)^3} (t + Q^1) \quad (5.49)$$

$$= \sqrt{\frac{GM}{a^3}} (t - t_0) \quad (5.50)$$

$$= n(t - t_0) \quad (5.51)$$

と、確かに mean anomaly になっている。Hamiltonian はエネルギーに戻るよう変換されており、特に今の正準変数では

$$H(J_1) = \frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{G^2 M^2 \mu^3}{2(J_1)^2} \quad (5.52)$$

と  $J_1$  のみの関数になる。残りの変数は恒等変換しか受けず、 $w^2 = Q^2 = \omega$ ,  $w^3 = Q^3 = \Omega$ ,  $J_2 = P_2 = J$ ,  $J_3 = P_3 = J_z$  は変わらない。

この手続きによって得られた正準変数の組を Delaunay 軌道要素と呼び、伝統的には  $w^1, w^2, w^3$  を  $l, g, h$  と、 $J_1, J_2, J_3$  を  $L, G, H$  と表記する。しかし一部の記号が他の物理量と紛らわしくなることもあり、物理的直観との兼ね合いも考えてこの講義では

$$w^1 = l = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} (t - t_0), \quad (5.53)$$

$$w^2 = \omega, \quad (5.54)$$

$$w^3 = \Omega, \quad (5.55)$$

$$J_1 = L = \mu\sqrt{GMa}, \quad (5.56)$$

$$J_2 = J = \mu\sqrt{GMa(1 - e^2)}, \quad (5.57)$$

$$J_3 = J_z = \mu\sqrt{GMa(1 - e^2)} \cos I \quad (5.58)$$

と記すことにする。Hamiltonian は

$$H(L) = -\frac{G^2 M^2 \mu^3}{2L^2} \quad (5.59)$$

と表され、非自明な正準方程式は

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dH}{dL} = n \quad (5.60)$$

のみとなり、Kepler 軌道の知識を援用しない立場ではこれを mean motion の定義式とみなすことができる。



### 5.2.3 Lagrange の惑星方程式

摂動が加わって Kepler 軌道要素が運動の定数でなくなったとき、各瞬間での運動に接する仮想的な Kepler 運動を考え、その軌道要素の変化として摂動の影響を取り入れるのが接触軌道法である。ここでは純粋な 2 質点相互作用の Hamiltonian を  $H_0(a) = -GM\mu/(2a)$  と書き、Delaunay 軌道要素を組み替えて得られる  $c^I = \{a, e, I, \Omega, \omega, l\}$  を引数とした摂動 Hamiltonian  $V(c^I)$  を用いて、全 Hamiltonian が  $H(c^I) = H_0(a) + V(c^I)$  で与えられる状況を考える。Delaunay 軌道要素からこの軌道要素  $c^I$  への変換は正準運動量を組み替えるだけなので、正準変換であることはほぼ自明であろう。以下で用いる  $c^J$  もこの軌道要素を指すものとする。

この条件の下での接触軌道要素  $c^I$  の時間発展を与える具体的な式は Lagrange の惑星方程式ないし摂動方程式と呼ばれ、Poisson 括弧  $\{*, *\}$  を用いて

$$\frac{dc^I}{dt} = \{c^I, H\} = \{c^I, c^J\} \left( \frac{\partial H_0}{\partial c^J} + \frac{\partial V}{\partial c^J} \right) \quad (5.61)$$

から導かれる\*<sup>8</sup>。この Poisson 括弧を Delaunay 要素を正準変数として評価するにあたり、正準座標は軌道要素  $c^I$  にもそのまま含まれており、一方で正準運動量は  $J = L\sqrt{1-e^2}$  および  $J_z = J \cos I$  により

$$a(L) = \frac{L^2}{GM\mu^2}, \quad (5.63)$$

$$e(L, J) = \sqrt{1 - \frac{J^2}{L^2}}, \quad (5.64)$$

$$I(J, J_z) = \arccos\left(\frac{J_z}{J}\right) \quad (5.65)$$

と表される。さらに非摂動部分では mean motion を用いて  $L = \mu n a^2$  とすると、Lagrange の惑星方程式

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2}{\mu n a} \frac{\partial V}{\partial l}, \quad (5.66)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1-e^2}{\mu n a^2 e} \frac{\partial V}{\partial l} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{\mu n a^2 e} \frac{\partial V}{\partial \omega}, \quad (5.67)$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\cos I}{\mu n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial V}{\partial \omega} + \frac{1}{\mu n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial V}{\partial \Omega}, \quad (5.68)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{\mu n a^2 e} \frac{\partial V}{\partial e} + \frac{\cos I}{\mu n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial V}{\partial I}, \quad (5.69)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{1}{\mu n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial V}{\partial I}, \quad (5.70)$$

$$\frac{dl}{dt} = n + \frac{2}{\mu n a} \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{1-e^2}{\mu n a^2 e} \frac{\partial V}{\partial e} \quad (5.71)$$

を得る\*<sup>9</sup>。この表式を解釈する上で、 $d\omega + \cos I d\Omega$  が  $x$  軸の軌道面への射影から近点までの角度の変化を表していることは注目に値する。

\*<sup>8</sup> 元々は Delaunay 軌道要素が軌道要素  $c^I$  の関数として与えられているため、Lagrange 括弧  $\{*, *\}$  を用いた

$$[c^I, c^J] \frac{dc^J}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial c^I} - \frac{\partial V}{\partial c^I} \quad (5.62)$$

の方が計算は直接的であり、そのためか（これは無根拠）摂動関数も伝統的には  $R = -V/\mu$  で定義されることが多い。

\*<sup>9</sup> もちろんこれらは Delaunay 軌道要素の発展方程式を変数変換しても得られる。

## 5.2.4 永年摂動

Kepler 軌道への摂動を考えると、我々の主な興味は瞬時的で微小な変化よりも、長期間の蓄積により顕著に現れる永年変化にあることが多い。永年変化を求めるには、摂動 Hamiltonian は長時間平均、あるいは今は周期運動を考えているので周期平均したものを考えれば十分である。具体的には周期  $P = 2\pi/n$  を用いて

$$\langle V \rangle := \frac{1}{P} \int_0^P V dt \quad (5.72)$$

を求め、Lagrange の惑星方程式において用いることで軌道要素の永年変化  $\langle dc^I/dt \rangle$  が得られる。この周期平均は  $dl = n dt$  を満たす mean anomaly、Kepler 方程式  $l = u - e \sin u$  を満たす eccentric anomaly、また角運動量の定義である  $J dt = \mu r^2 df$  を満たす true anomaly を用いて

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V dl \quad (5.73)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(1 - e \cos u) du \quad (5.74)$$

$$= \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{V}{(1 + e \cos f)^2} df \quad (5.75)$$

など、様々な形で表すことができる。特に eccentric anomaly を用いた表式は  $r/a = 1 - e \cos u$  に、true anomaly を用いた表式は  $a/r = (1 + e \cos f)/(1 - e^2)$  に関連して有益であることが多い。普通は平均化により摂動ポテンシャルは時間に依存しなくなり、エネルギーは長期的には保存し、従って軌道長半径  $a$  には永年変化がない。ただし、系にエネルギーを散逸させる機構などがあればこの限りではない。

## 5.3 Kepler 運動への摂動

Kepler 軌道の著しい特徴は、 $1/r$  ポテンシャルの隠れた対称性に伴い近点の方向  $\omega$  が保存されることだが、様々な摂動の下では時間変化する。この現象を近点移動と呼び、特に太陽まわりの軌道であれば近日点移動、地球まわりの軌道であれば近地点移動と呼び分けられることもある。さらにある種の三体問題を考えると、軌道の離心率や傾斜角も周期的な変化を示すようになり、これは古在機構と呼ばれる。これは以下、永年摂動論の応用例として、様々な原因で引き起こされる近点移動を見た後に、古在機構を紹介する。

### 5.3.1 $1/r^3$ ポテンシャルによる近点移動

2 質点の Kepler 運動において、 $C$  を定数として

$$V = \frac{C}{r^3} \quad (5.76)$$

なるポテンシャルへの摂動が加わった場合を考える<sup>\*10</sup>。Bertrand の定理として知られている通り、中心力ポテンシャルのうち軌道が閉じるのは  $r^2$  に比例するもの、 $r^{-1}$  に比例するものの二つだけなので、この補正が加わると楕円軌道は時間変化する と期待される。それを見るために長時間平均を求めると、true anomaly を

<sup>\*10</sup> ポテンシャルの  $1/r$  部分の変化は質量の変化と、 $1/r^2$  部分の変化は角運動量の変化と区別がつかない。

用いて

$$\langle V \rangle = \frac{C}{2\pi a^3(1-e^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos f) df \quad (5.77)$$

$$= \frac{C}{a^3(1-e^2)^{3/2}} \quad (5.78)$$

とできる。平均した摂動ポテンシャルは mean anomaly や近点引数に依存しないので、軌道長半径  $a$  や軌道離心率  $e$  には変化がなく、楕円の形自体は変化しないことがわかる。また、これは摂動 Hamiltonian も長期的には一定であることを意味する。

この補正の影響は近点引数の永年変化に現れ、具体的には

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{\mu a^2 e} \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial e} \quad (5.79)$$

$$= -\frac{3C}{\mu a^5 (1-e^2)^2} \quad (5.80)$$

と、一方向に増加ないし減少を続けることがわかる。とりわけ重要な応用例として、一般相対論による補正  $C = -GMJ^2/(\mu c^2)$  を考えると（この導出は諸々の教科書を参考にされたい）

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle = \frac{2\pi}{P} \frac{3GM}{c^2 a(1-e^2)} \quad (5.81)$$

を得る。これを太陽周りの水星の軌道に適用する（対応する値を代入する）と、水星の近日点は一世紀に 43 秒角ほど進むことがわかる。この近日点移動は一般相対論の提唱前から原因不明の現象として知られており、その定量的な説明を与えたことが一般相対論の正しさの強い傍証となった。

ただし、水星の近日点移動自体はこれより遥かに大きいことには注意が必要である。まず、地球の春分点歳差によって見かけ上一世紀に 5000 秒角ほどの近日点移動が起こる。それを差し引くと、今度は太陽系の他の惑星による重力が水星の軌道を影響することにより、やはり一世紀に 500 秒角ほどの近日点移動が引き起こされる。つまり、一般相対論の正しさを議論するためには、まずこれらの桁で大きな効果を精度良く差し引かなければならない。以下で、様々な近日点移動がどのように引き起こされるかを確認する。

### 5.3.2 四重極モーメントによる歳差運動

軌道運動を議論する前に、地球の春分点歳差について説明しておく。地球はその自転によって赤道面方向が膨らむ形に歪んでおり、0 でない換算四重極モーメント  $Q^{ij}$  を持っている。地球の自転軸である地軸は地球の公転軌道である黄道面の法線から  $23.4^\circ$  ほど傾いているため、太陽からの重力はこの歪みにトルクを及ぼし、地軸を法線のまわりに回転させる。このような回転軸の運動は一般に歳差運動と呼ばれる。また月は太陽よりも圧倒的に軽いものの、距離が圧倒的に近いので、やはり地球に大きなトルクを及ぼす。月の公転面は地球の公転面と一致はしないまでもかなり揃っており、地軸は太陽・月からのトルクの合算によって一世紀に 5000 秒角ほど歳差する。赤道面と黄道面とが交わる、赤道面における太陽の昇交点を春分点と呼ぶため、この歳差運動は地球の春分点歳差と呼ばれ、その周期は 26 000 年程度となる。この歳差運動により、地球から見ると水星など他の天体の軌道は逆回りに回っているように見え、見かけの近日点移動を生む。

地球の歳差運動は連星の軌道というよりも地球の自転の問題で、普通は剛体や連続体の力学を用いて解析される。一方、全系では角運動量が保存しているはずなので、太陽なり月なりが地球にトルクを及ぼして歳差運動を引き起こすなら、その反作用として太陽や月の軌道面も向きを変える歳差運動を起こしているはずであ

る。事実、地球の四重極モーメントが生むポテンシャルにより、軌道面にも歳差運動が起こることは Lagrange の惑星方程式から導かれる。そこで、ここでは軌道面の歳差運動を計算し、その反作用として地球の春分点歳差を理解することにする。

以下、簡単のために質量  $M$  の天体が  $z$  軸まわりの自転によって軸対称に変形して換算四重極モーメント  $Q^{ij}$  を持ち、さらにそのまわりを質量  $\mu \ll M$  の軌道天体が回っている場合を考える<sup>\*11</sup>。考えたいのはこの軌道天体  $\mu$  の軌道要素の永年変化である。まずは一般の密度分布を持つ天体がその外部に作る重力ポテンシャルを考えると、 $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{x}'$  との間の角度を  $\gamma$  として、Legendre 多項式により

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (5.82)$$

$$= -G \sum_{l=0} \frac{1}{r^{l+1}} \int \rho(\mathbf{x}') (r')^l P_l(\cos \gamma) d^3x' \quad (5.83)$$

と展開できる。天体が  $z$  軸まわりに軸対称であれば、この積分は球面調和関数の加法定理を用いて

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} \int \rho(\mathbf{x}') (r')^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') d^3x' \quad (5.84)$$

$$= -G \sum_l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{l0}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} \int \rho(\mathbf{x}') (r')^l Y_{l0}^*(\theta', \varphi') d^3x' \quad (5.85)$$

$$= -G \sum_l \frac{P_l(\cos \theta)}{r^{l+1}} \int \rho(\mathbf{x}') (r')^l P_l(\cos \theta') d^3x' \quad (5.86)$$

と書き直せる<sup>\*12</sup>。ここで、一行目から二行目への変形に軸対称性を用いた。この展開の高次項は  $1/r^l$  で抑えられるため、 $l$  の小さい項が主要な寄与を及ぼすが、 $l=0$  は質量による通常のポテンシャルを与えるのみであり、 $l=1$  は原点を重心に取れば消える。次に寄与が大きいのは  $l=2$  で、その積分は

$$Q := \int \rho(\mathbf{x}) \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{2} d^3x = Q^{zz} - \frac{Q^{xx} + Q^{yy}}{2} \quad (5.89)$$

を導く。以降ではこの定数  $Q$  を用いて議論するが、補足としてこの表式の四重極モーメント  $Q^{ij}$  は換算四重極モーメント  $Q^{ij}$  に置き換えることができ、また今は軸対称なので  $Q^{xx} = Q^{yy}$  である。ここで念頭に置いている地球の自転の議論では、(換算) 四重極モーメントの代わりに慣性モーメント  $I^{ij}$  を用いて  $Q$  を表すことも多い。

上記の考察により、自転による変形に付随する摂動 Hamiltonian の主な寄与は、 $1/r^3$  ポテンシャルに  $l=2$  の角度依存性が加わった

$$V = -\frac{G\mu Q}{r^3} P_2(\cos \theta) = -\frac{G\mu Q}{r^3} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \quad (5.90)$$

<sup>\*11</sup> 太陽の場合はこの仮定は成り立たないが、議論はほぼ同じである。

<sup>\*12</sup> ここで出てきた積分のいくつかは、しばしば

$$I_{lm} := \int \rho(\mathbf{x}) r^l Y_{lm}^*(\theta, \varphi) d^3x, \quad (5.87)$$

$$J_l := -\frac{1}{MR^l} \int \rho(\mathbf{x}) r^l P_l(\cos \theta) d^3x \quad (5.88)$$

などの記号で書かれる。この計算は本質的には 4 章での (4.22) 式による換算多重極モーメントの計算と同じだが、念頭に置いているのが多数の天体か単独の天体かを反映し、用いているのが直交座標か球座標かが異なっている。

で与えられることがわかる。この依存性自体は Laplace 方程式の斉次解の一般形から予想されるが、ここでは定量的な議論に必要な比例係数も自転天体の性質から定まっている<sup>\*13</sup>。さらに  $z/r = \cos \theta = \sin I \sin(\omega + f)$  を用いると

$$V = -\frac{G\mu Q}{4a^3} \left(\frac{a}{r}\right)^3 [1 - 3\cos^2 I - 3\sin^2 I \cos 2(\omega + f)] \quad (5.91)$$

と書き直すことができ、true anomaly による周期平均は

$$\langle V \rangle = \frac{G\mu Q}{2a^3(1-e^2)^{3/2}} \frac{3\cos^2 I - 1}{2} \quad (5.92)$$

と、軌道傾斜角に関する四重極型のポテンシャルを導く。長時間平均によって  $\cos 2(\omega + f)$  の項が落ち、近点引数に依存しなくなったため、軌道長半径のみならず、軌道離心率や軌道傾斜角にも永年変化がないことはすぐにわかる。近点引数の永年変化は

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{\mu a^2 e} \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial e} - \frac{\cos I}{\mu a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial (\cos I)} \quad (5.93)$$

$$= \frac{2\pi}{P} \frac{Q}{Ma^2(1-e^2)^2} \frac{3(1-5\cos^2 I)}{4} \quad (5.94)$$

と得られ、さらにここでは昇交点経度も

$$\left\langle \frac{d\Omega}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\mu a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial (\cos I)} \quad (5.95)$$

$$= \frac{2\pi}{P} \frac{Q}{Ma^2(1-e^2)^2} \frac{3\cos I}{2} \quad (5.96)$$

と永年変化を起こすことがわかる。これはつまり、中心天体の変形に伴って生じた四重極モーメントにより、軌道天体の軌道面が歳差運動を起こすことを意味する。より四重極の依存性を反映した表式として

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt} + \cos I \frac{d\Omega}{dt} \right\rangle = \frac{2\pi}{P} \frac{Q}{Ma^2(1-e^2)^2} \frac{3(1-3\cos^2 I)}{4} \quad (5.97)$$

も得られる。

先述の通り系の全角運動量は保存するため、軌道が歳差運動して  $\Omega$  が変化するときには中心天体にも同じだけのトルクがかかり、その自転軸も歳差運動する。今度は軌道角運動量の方向を固定して、その周りでの自転の歳差を考える。軌道角運動量と自転角運動量との間の角度は当然軌道の歳差を考えたときと同じ  $I$  であり、トルクが等しいので歳差角速度の比は角運動量の逆比で与えられる。通常は軌道角運動量の方が大きいので、先に求めた軌道の歳差角速度よりも自転の歳差角速度は大きい。軌道角運動量の方が圧倒的に大きく、それを固定した系が近似的に全角運動量が一定の系と同一視できる場合、この大きな自転の歳差角速度が春分点歳差を与える。いずれの角運動量も圧倒的に大きいというほどではない場合は、もう少し手の混んだ計算をして全角運動量が固定された系で考える必要がある。実際、地球と月との軌道角運動量は地球の自転角運動量に比べて圧倒的に大きいというほどではない。

### 5.3.3 制限階層三体問題

春分点歳差による見かけの影響を取り除いても、水星の近日点は他の惑星からの重力によって一世紀に 500 秒角ほど移動し、一般相対論による効果よりも桁で大きい。この値は太陽と水星との Kepler 軌道に対する他

<sup>\*13</sup> 地球のように扁平な回転楕円体の場合  $Q < 0$  で、同じ半径では極方向よりも赤道面の方がポテンシャルが深くなっている。

の惑星の影響を合計することで得られ、それぞれの惑星ごとに三体問題を取り扱えば導ける。とはいえ、一般の三体問題は複雑で手に負えないので、ここでは制限階層三体問題として扱う。制限三体問題というのは、三つの天体のうち一つが圧倒的に軽く、その質量が無視できる問題を指す。階層三体問題というのは、二天体の間の距離に比べて三つめの天体が圧倒的に遠いため、三体を二天体からなる連星である内天体と、内天体と第三の天体との連星である外天体に分けて議論できる問題を指す。

具体的には、質量  $M$  の中心天体および無視できる質量  $\mu$  の軌道天体からなる連星を内天体と考え、さらにその内天体および十分遠方を周っている質量  $m'$  の摂動天体とからなる連星を外天体と考える。主に想定しているのは  $M$  が太陽、 $\mu$  が水星、 $m'$  がその他の惑星という状況である。太陽系内の全ての惑星に対してこの扱いが妥当なわけではないが、例えば最も重い惑星である木星の影響を考える場合は良い近似である。また、以下で見るように、この近似は系統的に改善することが可能であり、実際に水星の近日点移動を求める上では高次の影響も含んだ取り扱いがなされる。以降、内天体である  $\mu$  の軌道要素を  $\{a, e, I, \Omega, \omega\}$  で、外天体である  $m'$  の軌道要素を  $\{a', e', I', \Omega', \omega'\}$  で表す。他にもプライムのついた量は外天体を表すのに用いるが、その意味は個別に説明する。

まずは摂動 Hamiltonian を求めるため、一般の質量  $m_1, m_2, m_3$  に関するポテンシャルを考え、それから制限階層三体問題に必要な表式を導く。それぞれの位置ベクトルを  $\mathbf{r}_1$  などと書き、背景の Hamiltonian は  $m_1$ - $m_2$  間の重力相互作用を含むものとする、摂動は

$$V = -Gm_3 \left( \frac{m_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} + \frac{m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} \right) \quad (5.98)$$

で与えられる。この  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  を重心位置  $\mathbf{R} = (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)/(m_1 + m_2)$  および相対位置  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  で書き換え、またこの2つの重心から  $m_3$  までの位置ベクトル  $\mathbf{r}' := \mathbf{r}_3 - \mathbf{R}$  も用いると

$$V = -Gm_3 \left( \frac{m_1}{|\mathbf{r}' - m_2\mathbf{r}/(m_1 + m_2)|} + \frac{m_2}{|\mathbf{r}' + m_1\mathbf{r}/(m_1 + m_2)|} \right) \quad (5.99)$$

と変形できる。ここで制限三体問題を考え、 $m_1 = \mu \ll m_2 = M, m_3 = m'$  として  $\mu$  の一次まで展開すると

$$V \approx -\frac{GMm'}{r'} - G\mu m' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r'^3} \right) \quad (5.100)$$

を得る。第一項は  $\mathbf{r}$  に依存しないため内天体の軌道には影響せず、外天体の軌道を決めるだけの項である。今の興味の対象は内天体の軌道であり、摂動である外天体の運動は軌道要素を直接指定して与えれば十分として、以降この項は無視する。次に階層三体問題を考えて  $r/r' \ll 1$  で展開すると、 $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{r}'$  との間の角度を  $S$  として、最低次の寄与を与える  $(r/r')^2$  まで拾って

$$V \approx -\frac{G\mu m'}{r'} \left[ 1 + \frac{r}{r'} P_1(\cos S) + \left( \frac{r}{r'} \right)^2 P_2(\cos S) - \frac{r}{r'} \cos S \right] \quad (5.101)$$

$$= -\frac{G\mu m'}{r'} \left[ 1 + \left( \frac{r}{r'} \right)^2 P_2(\cos S) \right] \quad (5.102)$$

となる。ここでも  $\mathbf{r}$  を含まない第一項を無視すると、必要な摂動 Hamiltonian として

$$V = -G\mu m' \frac{r^2}{r'^3} P_2(\cos S) \quad (5.103)$$

$$= -G\mu m' \frac{a^2}{a'^3} \left( \frac{r}{a} \right)^2 \left( \frac{a'}{r'} \right)^3 \frac{3 \cos^2 S - 1}{2} \quad (5.104)$$

を得る。ここでは  $m_1/m_2$  や  $r/r'$  について最低次の寄与のみ取り入れたが、必要に応じて高次項まで展開することも可能である。

永年摂動を考えるため、このポテンシャルを内天体、外天体の軌道両方で周期平均する。ここでは外天体の軌道面を  $xy$  平面に取り、 $I' = 0$  とする。この場合は外天体の昇交点が存在せず、昇交点経度  $\Omega'$  にも意味がなくなるので、便宜上  $\Omega' = \Omega$  と取る。位置ベクトルの間の角度を (5.23) 式によりそれぞれの軌道要素で表すと、今の設定では

$$\cos S = \cos(\omega + f) \cos(\omega' + f') + \cos I \sin(\omega + f) \sin(\omega' + f') \quad (5.105)$$

となり、角度依存性の部分は

$$\begin{aligned} \frac{3 \cos^2 S - 1}{2} &= \frac{3 \cos^2 I - 1}{8} + \frac{3 \sin^2 I}{8} [\cos 2(\omega + f) + \cos 2(\omega' + f')] \\ &+ \frac{3(1 + \cos^2 I)}{8} \cos 2(\omega + f) \cos 2(\omega' + f') + \frac{3 \cos I}{4} \sin 2(\omega + f) \sin 2(\omega' + f') \end{aligned} \quad (5.106)$$

と変形できる。このうち位相  $2(\omega' + f')$  を含む項は、外天体に関する平均によって消える。すると

$$\left\langle \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos u)^3 du \quad (5.107)$$

$$= 1 + \frac{3}{2} e^2 \quad (5.108)$$

および (5.19) 式、(5.20) 式を用いて得られる

$$\left\langle \left( \frac{r}{a} \right)^2 \cos 2(\omega + f) \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos u)^3 [\cos 2\omega \cos 2f - \sin 2\omega \sin 2f] du \quad (5.109)$$

$$= \frac{\cos 2\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos u) \left( \frac{3}{2} e^2 - 2e \cos u \right) du + 0 \quad (5.110)$$

$$= \frac{5}{2} e^2 \cos 2\omega \quad (5.111)$$

に加え、5.3.1 節でも用いた

$$\left\langle \left( \frac{a'}{r'} \right)^3 \right\rangle = \frac{1}{(1 - e'^2)^{3/2}} \quad (5.112)$$

を用いて、永年平均した摂動 Hamiltonian が

$$\langle V \rangle = -\frac{G\mu m' a^2}{a'^3 (1 - e'^2)^{3/2}} \left[ \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \frac{3 \cos^2 I - 1}{8} + \frac{15}{16} e^2 \sin^2 I \cos 2\omega \right] \quad (5.113)$$

と得られる。この摂動 Hamiltonian は単なる四重極ポテンシャルの平均と異なり、 $e \sin I \neq 0$  では内天体の近点引数にも依存しているため、軌道離心率や軌道傾斜角の変化を引き起こす。

一般の軌道傾斜角の場合については次節で改めて考えることとして、ひとまず近点移動に着目するために軌道面が揃った  $I = 0$  の三体を考える。実際、太陽系内の惑星は概ね軌道面が揃っており、水星の近日点移動を考えるにはこの扱いで悪くない。このときは  $e$  による微分を計算すればよく

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle = \frac{2\pi}{P} \frac{3}{4} \frac{m'}{M} \left( \frac{a}{a'} \right)^3 \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{(1 - e'^2)^{3/2}} \quad (5.114)$$

が得られる。正確な値を得るにはより高次の寄与を取り入れる必要があると留保した上で、この結果を水星に適用すると、一世紀に  $\mathcal{O}(100)$  秒角の近日点移動があることが示される。なお、一般の傾斜角に対しては  $\langle d\omega/dt + \cos I d\Omega/dt \rangle$  が上記の表式に従う。

### 5.3.4 古在機構

ここまでは主に近点移動に着目してきたが、階層三体問題において内天体と外天体との軌道面が異なり、今の設定で言えば軌道傾斜角  $I$  を持つ場合、軌道離心率や軌道傾斜角が周期的な変化を起こす。これはしばしば古在機構と呼ばれ、提唱直後にはあまり注目されなかったが、多様な系外惑星の発見や連星ブラックホール合体の発見などにより、21 世紀に入る頃から大きな注目を集めている\*<sup>14</sup>。

先に導いた摂動 Hamiltonian(5.113) 式には、内天体の昇交点経度  $\Omega$  や外天体の近点引数  $\omega'$  が表れていない。これは  $r/r'$  の 2 次まで展開した永年摂動の軸対称性を反映しており、付随して角運動量の  $z$  成分  $J_z = \mu\sqrt{GMa(1-e^2)}\cos I$  が長期的に保存する。Lagrange の惑星方程式を用いて確認すると

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = 0, \quad (5.115)$$

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\mu na^2 e} \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial \omega}, \quad (5.116)$$

$$= \frac{Gm'}{a'^3(1-e'^2)^{3/2}} \frac{15e\sqrt{1-e^2}}{8n} \sin^2 I \sin 2\omega, \quad (5.117)$$

$$\left\langle \frac{dI}{dt} \right\rangle = -\frac{\cos I}{\mu na^2 \sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial \omega} \quad (5.118)$$

$$= -\frac{e \cos I}{1-e^2 \sin I} \left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle \quad (5.119)$$

となるため、角運動量の  $z$  成分は

$$\left\langle \frac{dJ_z}{dt} \right\rangle = \mu\sqrt{GMa} \left( -\frac{e \cos I}{\sqrt{1-e^2}} \left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle - \sqrt{1-e^2} \sin I \left\langle \frac{dI}{dt} \right\rangle \right) \quad (5.120)$$

$$= 0 \quad (5.121)$$

に従い、確かに永年変化しない。仮に摂動 Hamiltonian が mean anomaly  $\ell$  に依存性していたとしても  $a$  と  $e$  とで相殺するため、本質的なのは昇交点経度  $\Omega$  に依存しないことである。一方、近点引数および昇交点引数の永年変化は

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{\mu na^2 e} \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial e} + \frac{\cos I}{\mu na^2 \sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial I}, \quad (5.122)$$

$$= -\frac{Gm'}{a'^3(1-e'^2)^{3/2}} \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}} \left[ \frac{3}{8}(1-e^2-5\cos^2 I) - \frac{15}{8}(\sin^2 I - e^2) \cos 2\omega \right], \quad (5.123)$$

$$\left\langle \frac{d\Omega}{dt} \right\rangle = -\frac{1}{\mu na^2 \sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial I} \quad (5.124)$$

$$= -\frac{Gm'}{a'^3(1-e'^2)^{3/2}} \frac{\cos I}{n\sqrt{1-e^2}} \left[ \frac{3}{4} \left( 1 + \frac{3}{2}e^2 \right) - \frac{15}{8}e^2 \cos 2\omega \right] \quad (5.125)$$

で与えられる。軌道要素の永年変化が、 $\omega$  自身を含めて  $\omega$  に依存していることは着目に値する。

\*<sup>14</sup> 誰が最初の提唱者かということ巡っては様々な議論があり、von Zeipel-Lidov-Kozai 機構と呼ぶのが正しいという説が有力なようである。例えば T. Ito and K. Ohtsuka, Monogr. Environ. Earth Planets 7, 1-113 (2019) に詳しい。



この系では、周期平均した摂動 Hamiltonian が時間に依存しないことから、あるいは Lagrange の惑星方程式から直接示すこともできるように、軌道長半径や外天体の軌道要素を括り出して定義される

$$\hat{V} := \left(1 + \frac{3}{2}e^2\right)(3 \cos^2 I - 1) + \frac{15}{2}e^2 \sin^2 I \cos 2\omega \quad (5.126)$$

が保存し、また軌道長半径が角運動量の  $z$  成分と独立に保存することから

$$C := \sqrt{1 - e^2} \cos I \quad (5.127)$$

も保存する。特に  $C$  が保存し、一方で  $e$  や  $I$  自身は保存しないことから、この 2 つはお互いに増減を繰り返すことが示唆される。そこで  $0 \leq I < \pi/2$  に対応する  $C > 0$  の場合を考え ( $C < 0$  の場合も同様に議論できる)、軌道要素の変化の特徴を捉えよう。そのために、 $C$  を用いて軌道傾斜角を消去した摂動 Hamiltonian

$$\hat{V}(e, \omega; C) = \left(1 + \frac{3}{2}e^2\right) \left(\frac{3C^2}{1 - e^2} - 1\right) + \frac{15}{2}e^2 \left(1 - \frac{C^2}{1 - e^2}\right) \cos 2\omega \quad (5.128)$$

を用いて、軌道離心率の挙動を考察する。これは  $2\omega$  の周期関数であるため、以降では  $0 \leq \omega < \pi$  のみに着目する。特別な場合として、 $e = 0$  および与えられた  $C$  に対して  $\cos I = 1$  で達成される最大離心率  $e^2 = e_{\max}^2 := 1 - C^2$  では第二項が消え、 $e$  や  $I$  は永年変化しなくなる。これは Lagrange の惑星方程式からも直ちに確認できる。

軌道離心率の最大・最小が実現されるのは、 $\langle de/dt \rangle = 0$  となる条件から  $\omega = 0$  および  $\pi/2$  であることがわかる。このうち  $\omega = 0$  では必ず  $\langle dw/dt \rangle \geq 0$  であり、 $\langle de/dt \rangle$  は負から正に切り替わるため、離心率は最小値のみが可能である。付随して、軌道傾斜角は最大となる。ただし

$$\hat{V}(\omega = 0) = 3C^2 - 1 + 6e^2 \quad (5.129)$$

が  $e^2$  について単調かつ与えられた  $C$  に対して  $0 \leq e \leq e_{\max}$  であることから、 $\omega = 0$  が実現するのは  $3C^2 - 1 \leq \hat{V} \leq 5 - 3C^2$  の場合に限られる。なお、 $C^2 < 1$  なのでこの上下限が逆転することはない。一方、 $\omega = \pi/2$  では  $\langle dw/dt \rangle$  が正負いずれの値も取りうるため、離心率は最大・最小のどちらも取りうる。こちらでは

$$\hat{V}\left(\omega = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3(1 + 4e^2)}{1 - e^2} C^2 - 1 - 9e^2 \quad (5.130)$$

が成り立ち、 $e = 0$  で  $\hat{V} = 3C^2 - 1$ 、 $e = e_{\max}$  で  $\hat{V} = 5 - 3C^2$  と  $\hat{V}(\omega = 0)$  と同じ結果が得られる。これらは先述の通りそもそも  $e$  や  $I$  が、ひいては  $\hat{V}$  も  $\omega$  に依存しない特別な場合を表している。しかし  $\hat{V}(\omega = \pi/2)$  は  $e^2$  に単調でなく、 $e^2 = 1 \pm \sqrt{5C^2/3}$  で極値を取る。特に、物理的に可能な  $0 \leq e < 1$  に極値が存在する条件は  $C^2 \leq 3/5$  で与えられ、これを満たす  $C$  に対しては  $\omega = 0$  を通らずに離心率の最大も最小も  $\omega = \pi/2$  で得られる軌道が実現しうる<sup>\*15</sup>。摂動 Hamiltonian の極値は  $\hat{V} = -12C^2 + 18\sqrt{5C^2/3} - 10$  で、これは  $C^2 = 3/5$  のとき  $e = 0$  に対する  $\hat{V} = 3C^2 - 1$  に一致して  $4/5$  となる。

軌道の変化を理解するには、軌道離心率  $e$  と近点引数  $\omega$  との平面で描いた解軌道が有用である。軌道離心率は  $\sqrt{1 - e^2}$  と一対一に対応しているため、これは実質的に共役な正準変数  $J$ - $\omega$  に対する相空間になっても

<sup>\*15</sup> ここでは摂動 Hamiltonian を用いて議論したが、同様の議論は  $\langle dw/dt \rangle$  を用いても行える。停留点であることを考えれば、 $\langle dw/dt \rangle = 0$  から極値となる  $e$  の値が得られる。極値を  $0 \leq e < 1$  に持つ条件自体も、 $\langle dw/dt \rangle$  が  $-1 \leq \cos 2\omega \leq 1$  で 0 となりうるという条件

$$-1 \leq \frac{1 - e^2 - 5 \cos^2 I}{5(1 - e^2 - \cos^2 I)} = \frac{(1 - e^2)^2 - 5C^2}{5(1 - e^2)^2 - 5C^2} \leq 1 \quad (5.131)$$

から得られる。具体的には、分母が正の場合にのみ上限条件が自明な式として成り立ち、その場合の下限条件から従う。また、

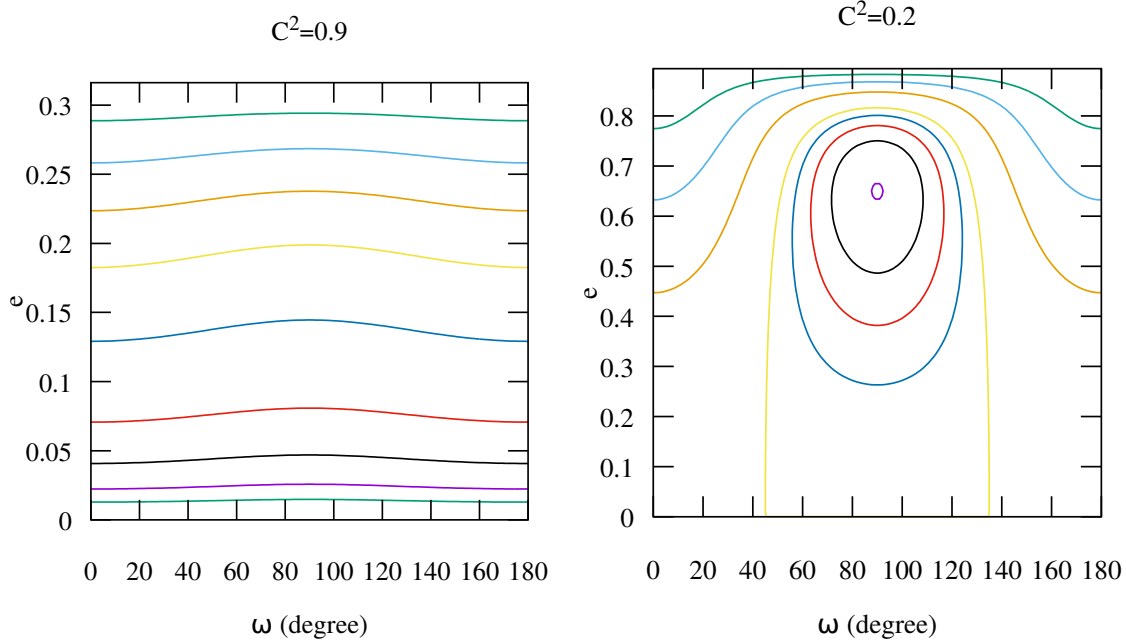


図 5.3 制限階層三体問題における内天体の  $e$ - $\omega$  平面上の解軌道。左は  $C^2 = 0.9$  の場合で、等高線は上から順に  $\hat{V} = 2.2, 2.1, 2.0, 1.9, 1.8, 1.73, 1.7, 1.703, 1.701$ 。この場合は全ての解軌道が  $\omega$  について回転になる。右は  $C^2 = 0.2$  の場合で、等高線は上から順に  $\hat{V} = 3.2, 2.0, 0.8, -0.4$  (separatrix),  $-0.8, -1.2, -1.6, -2.0$ 。この場合は  $\omega$  について回転となる場合、秤動となる場合の両方がある。

いる。解系列の性質が  $C^2 = 3/5$  を境に定性的に変わるという上記の考察に基づき、図 5.3 には  $C^2 = 0.9$  の場合 (左)、 $C^2 = 0.2$  の場合 (右) を示した。図上に示された  $\hat{V} = \text{const.}$  の等高線が与えられた  $(\hat{V}, C)$  に対する解軌道となる。まず  $C^2 > 3/5$  の場合、全ての解は  $\omega$  が  $0$  から  $\pi$  まで変化し、このような解は回転 (rotation) と呼ばれる。離心率は  $\omega = 0$  で最小、 $\omega = \pi/2$  で最大になり、軌道傾斜角はその逆の振る舞いを見せる。一方  $C^2 < 3/5$  の場合、 $\hat{V}$  の大きな解は先と同様に回転となるが、 $\hat{V}$  が小さいときは  $e$  を増減させながら  $\omega$  が  $\pi/2$  の周りで振動する、秤動 (libration) と呼ばれる解になる。いずれの解も、角運動量の  $z$  成分にあたる  $C$  が保存されることを反映し、外天体の軌道に対して傾いた円軌道と揃った楕円軌道とを周期的に行き来しており、この振動を広義の古在機構と呼ぶ。狭義には、近点引数  $\omega$  が  $\pi/2$  ないし  $3\pi/2$  の周りを振動する秤動の場合のみを古在機構と呼ぶ (ようである)。

与えられた  $C$  に対し、最大の軌道傾斜角が  $e = 0$  での  $I_{\max} = \text{acos } C$  であることを用いると、秤動が起こりうる条件を直観的に把握しやすい軌道傾斜角で議論することもできる。先の場合分けと合わせると、秤動を起こさない  $C > \sqrt{3/5}$  の軌道では、軌道傾斜角が古在角度 (Kozai angle)<sup>\*16</sup>  $I_K := \text{acos}(\sqrt{3/5}) \approx 39.2^\circ$  を超

$\omega = 0$  を通る  $3C^2 - 1 \leq \hat{V} \leq 5 - 3C^2$  の軌道では  $\langle d\omega/dt \rangle$  が符号を変えないことは、 $\hat{V}$  を用いて  $\cos 2\omega$  を消去した

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle = \frac{Gm'}{a'^3(1-e'^2)^{3/2}} \frac{2\{(\hat{V} + 3C^2 + 1)e^4 - 2[\hat{V} - (3C^2 - 1)]e^2 + (1 - C^2)[\hat{V} - (3C^2 - 1)]\}}{3e^2(1 - e^2 - C^2)\sqrt{1 - e^2}} \quad (5.132)$$

について、分子の  $e^2$  に関する 2 次方程式の判別式が

$$D = 4C^2[\hat{V} - (3C^2 - 1)][\hat{V} - (5 - 3C^2)] \quad (5.133)$$

であることから示せる。

\*16 実際のところ、この日本語訳を見たことはない。

えることはない。逆に  $C < \sqrt{3/5}$  の軌道は  $I < I_K$  も  $I > I_K$  も取りうるため、観測された軌道が  $I > I_K$  であれば秤動を起している可能性がある。今まで考えなかった  $C < 0$ 、つまり  $I > \pi/2$  も合わせて考えると、 $39.2^\circ \lesssim I \lesssim 140.8^\circ$  の軌道であれば、秤動あるいはより一般に離心率や傾斜角の大きな振動が期待できる。

古在機構の特徴的な時間スケールは、軌道離心率が振動することを念頭に、その発展方程式 (5.116) から見積もることができる。右辺のうち次元を持った量の逆数を考え、ただし外天体の軌道離心率は残しておく、内天体・外天体の周期  $P, P'$  を用いて

$$t_K \approx \frac{na'^3(1-e'^2)^{3/2}}{Gm'} \quad (5.134)$$

$$\approx \left(1 + \frac{M}{m'}\right)(1-e'^2)^{3/2} \frac{P'^2}{P} \quad (5.135)$$

が特徴的な時間スケールを与える。より詳細に永年変化を知りたい場合、今の近似での Lagrange の惑星方程式の解は、楕円関数で表されることが知られている [H. Kinoshita and H. Nakai, *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 75, 125-147 (1999)]。

古在機構はそれ自身でも太陽系内天体の理解や衛星軌道への応用があり興味深い、天体物理においては、離心率の上昇によって近点距離  $a(1-e)$  が縮まることがしばしば重要になる。この節の議論ではエネルギーを散逸させる過程を考慮しなかったため、軌道長半径  $a$  は永年変化しないとした。実際には、軌道のエネルギーが天体内部の運動エネルギーや流体の内部エネルギーに受け渡される潮汐加熱や、一般相対論効果である重力波の放射などの散逸機構が存在する。これらの散逸の効率は典型的に天体間の距離に強い負の冪乗で依存するため、近点距離が縮まると急激にエネルギーが失われ、軌道長半径も縮むことになる。他にも遠点距離  $a(1+e)$  がいくぶん大きくなり、そこで外天体や他の天体と相互作用しやすくなる影響もある。これらの効果により、古在機構は連星の進化を加速する役割も果たし、系外惑星の発見や重力波で合体する連星の発見といった観測の進展に伴い、盛んに議論されるようになった。

最後に、この議論で用いた近似を改めて振り返り、その限界に言及しておく。まず、内天体の片方は質量が無視できる制限三体問題とした。さらに、外天体は内天体より十分に遠くにある階層三体問題とした。特に、内天体の角運動量の  $z$  成分  $J_z = \mu\sqrt{GMa(1-e^2)} \cos I$  が保存するのは、後者に関して  $r/r'$  の 2 次までしか展開しなかったことに由来する。実は、外天体に離心率があり、かつ内天体の質量に差がある場合、この保存は長期的には良い近似とならず、 $r/r'$  の 3 次の項を考えないと定性的に間違った結論を導きうるということが知られている [レビューとして S. Naoz, *ARA&A* 54, 441-489 (2016) など]。他にも 5.3.1 節で取り扱った一般相対論補正による近点移動や、あるいは潮汐相互作用などで、この節で扱った最も簡単な古在機構とは異なる振る舞いが見られるようになる。この節での主題であった軌道離心率と軌道傾斜角とが入れ替わりながら振動するという基本的な描像には変わりがないが、その具体的な状況への応用に際しては近似の妥当性に注意が必要であると同時に、だからこそ豊かな振る舞いを見せ注目を集めている機構であるとも言える。

# 付録 A

## 第 2 章補遺

### A.1 球対称等温重力崩壊の自己相似解の系列

#### A.1.1 Shu 解

Larson-Penston 解以外にも重力崩壊を表す自己相似解は多々あり、点状コアを原点に持つ Shu 解の系列およびその極限である膨張波解 (expanding wave solution) はその代表例である [F. H. Shu, ApJ 214, 488 (1977)]. これは無限遠ではほぼ静止して特異等温球に類似した外層が、点状コアの寄与を含め強まった重力に引かれて落下し、中心付近ではほぼ自由落下して密度が発散する解である。有限の質量を持つ中心コアを原始星とみなすと、その表面では落ちてきた流体が衝撃波を生ずるはずであるが、周囲は超音速流なので衝撃波やその内部の構造は外部に影響を及ぼさない。Larson-Penston 解と比べ、どちらがどのような状況で妥当かについては Shu の原論文を筆頭にそれ以降も様々な議論がある\*1。現状では、星形成の初期段階に起こる重力崩壊は Larson-Penston 解でよく近似でき、中心で原始星が形成された後は Shu 解に近い振る舞いをしようと考えられているようであるが [例えば P. N. Foster and R. A. Chevalier, ApJ 416, 303 (1993)]、次節で触れるように Larson-Penston 解も  $t > 0$  では Shu 解に近い振る舞いをすることもあり、観測を含め決定的な議論はない\*2。

ここでは時刻  $t = 0$  でほぼ静水圧平衡にあった初期状態の中心に大きさの無視できるコアが生じ、そこから崩壊が広がる解を考える。それに応じて、2.4.1 節で分離した時間依存性を

$$a(t) = c_s t, \quad (\text{A.1})$$

$$V(t) = c_s, \quad (\text{A.2})$$

$$D(t) = \frac{1}{4\pi G t^2}, \quad (\text{A.3})$$

$$M(t) = \frac{c_s^3 t}{G} \quad (\text{A.4})$$

と定めて変数を無次元化する。この解は  $t > 0$  で特徴的な空間スケールが広がっていくため、しばしば“inside-out”解と呼ばれ、特徴的な質量も時間とともに増加する。自己相似解を定める式は

$$\frac{d\tilde{v}}{dx} = \frac{x - \tilde{v}}{x} \frac{(x - \tilde{v})\tilde{\rho}x - 2}{(x - \tilde{v})^2 - 1}, \quad (\text{A.5})$$

\*1 絶版となっている坂下志郎、池内了「宇宙流体力学」(培風館)は名著であるが、7-6 節では Larson-Penston 解でなく Shu 解を中心に議論しており、少なくとも現代的な観点からは不満である。

\*2 後期段階では温度が  $2-3 \times 10^3$  K に上がった段階で水素分子の解離による冷却が働くが、このときはおよそ  $\Gamma \approx 1.1$  になると考えられている。水素分子が水素原子になると改めて断熱的なコアが形成される。

$$\frac{d \ln \tilde{\rho}}{dx} = \frac{x - \tilde{v}}{x} \frac{\tilde{\rho} x - 2(x - \tilde{v})}{(x - \tilde{v})^2 - 1} \quad (\text{A.6})$$

と Larson-Penston 解の場合と変わらないので<sup>\*3</sup>、特異性の議論も変更を受けない。しかし Shu 解では、原点では点状コアのため物理量が発散しており正則性も満たさず、落下してきた物質は遷音速点を通ることなく超音速に達する。例外として、後述する膨張波解は遷音速点を通り、これは特異等温球に近づく極限となっている。

まず境界条件を定めて解の漸近的な振る舞いを調べる。無限遠で速度が 0 とすると、定数  $\tilde{s}_\infty$  を用いて

$$\tilde{\rho} \rightarrow \frac{\tilde{s}_\infty}{x^2}, \quad (\text{A.7})$$

$$\tilde{v} \rightarrow -\frac{\tilde{s}_\infty - 2}{x} \quad (\text{A.8})$$

が要請され、 $\tilde{m} \rightarrow \tilde{s}_\infty x$  も従う。Larson-Penston 解と同じく圧力勾配力は  $2/x$  で、重力は  $-\tilde{s}_\infty/x$  で与えられる。平衡解である特異等温球は  $\tilde{s}_\infty = 2$  に対応し、 $x = 1$  に臨界点を持つ。崩壊を記述する Shu 解は特異等温球の密度を嵩上げした  $\tilde{s}_\infty > 2$  で与えられ、強まった重力により全体が落下していると解釈できる。一方、原点付近を考えるにあたり、速度が 0 にならず質量も  $\tilde{m}(x=0) = -\tilde{\rho}\tilde{v}x^2 = \tilde{m}_0$  と一定に近づくとする

$$\frac{d\tilde{v}}{dx} \rightarrow -\frac{\tilde{m}_0\tilde{v}}{x^2(\tilde{v}^2 - 1)} \quad (\text{A.9})$$

が得られる。このとき  $\tilde{v}$  が有限にとどまる解はなく

$$\tilde{v} \rightarrow -\sqrt{\frac{2\tilde{m}_0}{x}}, \quad (\text{A.10})$$

$$\tilde{\rho} \rightarrow \sqrt{\frac{\tilde{m}_0}{2x^3}} \quad (\text{A.11})$$

と密度も速度も発散する解のみが得られる。圧力勾配力は  $3/(2x)$  で与えられる一方、重力は中心コアにより  $-\tilde{m}_0/x^2$  となるため、原点付近では重力が支配的になって自由落下が実現される。定数  $\tilde{m}_0$  は  $\tilde{s}_\infty$  によって定まり、数値解から  $\tilde{m}_0(\tilde{s}_\infty)$  は  $\tilde{s}_\infty$  の増加関数であることが知られている。

膨張波解は  $\tilde{s}_0 \rightarrow +2$  の極限として与えられ、静水圧平衡にある特異等温球の中心から膨張波が伝わって崩壊する状況を表す。自己相似変数で見ると  $x > 1$  は特異等温球を保って静止しており、膨張波の先端である  $x = 1$  で臨界点を通り、 $x < 1$  が落下して特異等温球より密度が低くなった領域を表す。ただし、臨界点では微分が不連続になっている。臨界点である  $x = 1$  が物理的には  $r = c_s t$  を表すことから、この解では崩壊領域が音速で広がっていることがわかる。特異等温球において  $x < 1$  が持つ質量は  $\tilde{m}(x=1) = 2$  であるが、この領域が崩壊している膨張波解で点状コアが持つ質量は  $\tilde{m}_0(\tilde{s}_0 \rightarrow +2) = 0.975$  と数値的に得られており、残りの 1.025 はまだ落下している状態にある。

## A.1.2 自己相似解の分類と系列

原点で正則かつ遠方で密度が消えるという境界条件であっても、自己相似解は Larson-Penston 解に一意に決まるわけではなく、他に外向きに伝播する有限振幅の音波が乗った Hunter 解と呼ばれる可算無限の解系列が存在することが知られている [C. Hunter, ApJ 218, 834 (1977)]。この解系列では速度が外向きにな

<sup>\*3</sup> この規格化では、Larson-Penston 解は  $x < 0$  での解として求められる。もちろん、 $t = 0$  で Larson-Penston 解から Shu 解に滑らかに繋がるわけではない。

る領域が存在しており、節の数が系列をラベルする。中心付近でも無限遠近傍でも速度が内向きになるには節は偶数でなければならず、特に節が2つの Hunter-b 解、4つの Hunter-d 解はしばしば解の性質の議論に用いられる。ただし Hunter 解は球対称な摂動に対して不安定であることが知られており [T. Hanawa and K. Nakayama, ApJ 484, 238 (1997)], Shu 解もこの節の数が無限になった極限と捉えられるため、安定な球対称解は Larson-Penston 解だけだろうと考えられている。事実、球対称な重力収縮による星形成の数値計算でも、中心部は Larson-Penston 解に近づいていく様子が繰り返し確認されている。

Hunter は同時に、Larson-Penston 解の  $t > 0$  への拡張、Shu 解の  $t < 0$  への拡張を行っている。大まかにいうと、自己相似変数を  $\zeta = 1/x = c_s t/r$  に取り替えることで、時刻  $t$  が負から正に切り替わる瞬間を自然に追うことができるように式を書き直している。ただし自己相似変数を  $x = r/(c_s t)$  に取っても  $x \rightarrow -\infty$  の解を  $x \rightarrow +\infty$  の解と同定して拡張することは可能であり、本質的に必要な操作というわけではない。拡張された Larson-Penston 解においても  $t > 0$  では中心にコアが形成されて自由落下に近づくため、中心付近だけ見ても Shu 解との区別はしづらいが、遠方で超音速で落下している点は明らかに異なる。

より完全な臨界点および解の分類に基づいて、非可算無限の自己相似解の解系列が存在することが知られている [A. Whitworth and D. Summers, MNRAS 214, 1-25 (1985)]. ここでも自己相似変数は Shu 解のときと同様の無次元化によって定義し、同じ微分方程式に基づいて議論する。Larson-Penston 解など暴走的収縮は  $x < 0$  で記述され、臨界点は  $x - \tilde{v} = -1$  で与えられる。Shu 解のような点状コアに付随した inside-out 解は  $x > 0$  で記述され、膨張波解の臨界点は  $x - \tilde{v} = +1$  である。臨界点の位置  $x = x_*$  の周りで変数を

$$x - \tilde{v} = \pm 1 + A(x - x_*) + \mathcal{O}((x - x_*)^2), \quad (\text{A.12})$$

$$\tilde{\rho}x = \pm 2 + B(x - x_*) + \mathcal{O}((x - x_*)^2) \quad (\text{A.13})$$

のように展開すると、以降複号はこの2つの臨界点に対応するとして、 $d\tilde{v}/dx$  から

$$1 - A \approx \pm \frac{2A + B}{2Ax_*} \quad (\text{A.14})$$

が、 $d(\tilde{\rho}x)/dx = \tilde{\rho}x d(\ln \rho)/dx + \tilde{\rho}$  から

$$B \approx \pm \frac{B}{Ax_*} \quad (\text{A.15})$$

が従う。前者から  $B = 2A[\pm(1 - A)x_* - 1]$  が得られ、後者が満たされるのは  $Ax_* \mp 1 = 0$  の場合か、 $B = 0$  あるいはそれと等価な  $Ax_* - x_* \pm 1 = 0$  の場合である。この2つに応じて、臨界点を通る正則な解には type 1 と呼ばれる

$$-\tilde{v} = \pm 1 - x_* + \left(\pm \frac{1}{x_*} - 1\right)(x - x_*), \quad (\text{A.16})$$

$$\tilde{\rho} = \pm \frac{2}{x_*} - \frac{2}{x_*} \left(\pm \frac{3}{x_*} - 1\right)(x - x_*) \quad (\text{A.17})$$

と、type 2 と呼ばれる

$$-\tilde{v} = \pm 1 - x_* \mp \frac{1}{x_*}(x - x_*), \quad (\text{A.18})$$

$$\tilde{\rho} = \pm \frac{2}{x_*} \mp \frac{2}{x_*^2}(x - x_*) \quad (\text{A.19})$$

との2種類が存在する\*4。特異等温球は複号のいずれでも  $x_* = \pm 1$  なる type 1 の自己相似解である。膨張波解は複号の上に対応し、 $x > x_* = 1$  の特異等温球が  $x < x_* = 1$  で type 2 に切り替わっている。Larson-Penston 解は複号の下に対応し、 $x_* = -2.33$  での type 2 の解になっている。

ここから臨界点が  $-1 < x_* < 0$  では鞍点に、 $x_* < -1$  では節になることが示され、後者では type 1, 2 の解の任意の線形結合が許されることから非可算無限の解が存在することが言える。臨界点の性質を調べるには、微分方程式を

$$\frac{d\tilde{v}}{dx} = \frac{Y}{X}, \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dx} = \frac{Z}{X}, \quad (\text{A.23})$$

$$X := x[(x - \tilde{v})^2 - 1], \quad (\text{A.24})$$

$$Y := \tilde{\rho}x(x - \tilde{v})^2 - 2(x - \tilde{v}), \quad (\text{A.25})$$

$$Z := \tilde{\rho}^2x(x - \tilde{v}) - 2\tilde{\rho}(x - \tilde{v})^2 \quad (\text{A.26})$$

と書き、 $X^i = (X, Y, Z) = 0$  となる臨界点  $x = x_*$  の周りで  $x^i = (x, \tilde{v}, \tilde{\rho})$  を独立変数とした動力学行列の固有値を求めればよい。ここで上付き添字は3つの成分を指すために用いた。動力学行列の要素は

$$\frac{\partial X^i}{\partial x^j} = \begin{pmatrix} (x - \tilde{v})^2 + 2x(x - \tilde{v}) - 1 & -2x(x - \tilde{v}) & 0 \\ \tilde{\rho}(x - \tilde{v})^2 + 2\tilde{\rho}x(x - \tilde{v}) - 2 & -2\tilde{\rho}x(x - \tilde{v}) + 2 & x(x - \tilde{v})^2 \\ \tilde{\rho}^2(2x - \tilde{v}) - 4\tilde{\rho}(x - \tilde{v}) & -\tilde{\rho}^2x + 4\tilde{\rho}(x - \tilde{v}) & 2\tilde{\rho}x(x - \tilde{v}) - 2(x - \tilde{v})^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

$$= \begin{pmatrix} \pm 2x_* & \mp 2x_* & 0 \\ 2(1 \pm 1/x_*) & -2 & x_* \\ -(4/x_*)(1 \mp 1/x_*) & 4/x_* & 2 \end{pmatrix} (x = x_*) \quad (\text{A.28})$$

と書き下すことができ、その特性方程式は

$$\lambda[\lambda^2 \mp 2x_*\lambda - 4(1 \mp x_*)] = 0 \quad (\text{A.29})$$

となる。固有値  $\lambda = 0$  は隣接する臨界点に移る方向で、物理的な解を記述するものではない。特に崩壊前の  $x_* < 0$  に着目すると、物理的な解の挙動を支配するのは  $\lambda_{\pm} = -x_* \pm (x_* - 2)$  で、それぞれ個別に書くと

$$\lambda_+ = 2, \quad (\text{A.30})$$

$$\lambda_- = -2(x_* + 1) \quad (\text{A.31})$$

である\*5。ここから、 $-1 < x_* < 0$  では固有値が正負一つずつで、臨界点が鞍点になっていることがわかる。一方、固有値が共に正となる  $x_* < -1$  の臨界点は節で、この場合は周囲のあらゆる点が臨界点につながれる。そのため type 1, 2 の任意の線形結合が臨界点を通過でき、非可算無限の解が存在する。ただし膨張波解と同様、臨界点で解が滑らかに繋がっているとは限らない。なお、固有値が全て負にならないのは、臨界点にとどまる（点の分類の意味で）安定な解が存在しないことに対応しており、物理的に期待されることである。

\*4 この変形では

$$-\tilde{v} \approx \pm 1 - x_* + (A - 1)(x - x_*), \quad (\text{A.20})$$

$$\tilde{\rho} \approx \pm \frac{2}{x_*} + \left( \frac{B}{x_*} \mp \frac{2}{x_*^2} \right) (x - x_*) \quad (\text{A.21})$$

を用いた。

\*5 複合の意味が混乱するので書かなかったが、 $x_* > 0$  の場合は  $\lambda_{\pm} = x_* \pm (x_* - 2)$  で、 $\lambda_+ = 2(x_* - 1)$ 、 $\lambda_- = 2$  となっている。

## 付録 B

### 第 3 章補遺

#### B.1 Lane-Emden 方程式の数値解法

Lane-Emden 方程式を数値的に解く際は、二本の一階微分方程式

$$\frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{\mu}{\xi^2}, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{d\mu}{d\xi} = \xi^2 \theta^n \quad (\text{B.2})$$

に分けて扱うのが便利である。数値積分の手法としてよく採用されるのは、動径座標  $\xi$  を有限の幅  $\Delta\xi$  に分け、微分を差分で近似する有限差分法である。Lane-Emden 方程式の数値積分は原点  $\xi = 0$  で  $\theta = 1, \mu = 0$  から始めたいところであるが、 $\mu/\xi^2$  の項に注意が必要である。というのは、原点近傍では  $\mu = \mathcal{O}(\xi^3)$  なので解析的には問題なくとも、数値計算を厳密に  $\xi = 0$  から始めようとする  $0/0$  が発生してしまい、扱えないからである。そこで通常この積分は、原点から微小に進んだ点  $\xi = \epsilon$  で、展開により得られる

$$\theta = 1 - \frac{1}{6}\epsilon^2 + \frac{n}{120}\epsilon^4 + \mathcal{O}(\epsilon^6) \quad (\text{B.3})$$

$$= 1 - \frac{1}{6}\epsilon^2 \left(1 - \frac{n}{20}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4)\right), \quad (\text{B.4})$$

$$\mu = \frac{1}{3}\epsilon^3 - \frac{n}{30}\epsilon^5 + \mathcal{O}(\epsilon^7) \quad (\text{B.5})$$

$$= \frac{1}{3}\epsilon^3 \left(1 - \frac{n}{10}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4)\right) \quad (\text{B.6})$$

を初期値として始める。もちろん、求める精度に応じてもっと高次まで展開してから始めることもできる。同様に、等温球の

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{\mu}{\xi^2}, \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{d\mu}{d\xi} = \xi^2 e^{-x} \quad (\text{B.8})$$

についても

$$x = \frac{1}{6}\epsilon^2 - \frac{1}{120}\epsilon^4 + \mathcal{O}(\epsilon^6) \quad (\text{B.9})$$

$$= \frac{1}{6}\epsilon^2 \left(1 - \frac{1}{20}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4)\right), \quad (\text{B.10})$$



$$\mu = \frac{1}{3}\epsilon^3 - \frac{1}{30}\epsilon^5 + \mathcal{O}(\epsilon^7) \quad (\text{B.11})$$

$$= \frac{1}{3}\epsilon^3 \left( 1 - \frac{1}{10}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \right) \quad (\text{B.12})$$

と始められる。

有限の半径  $\xi = \xi_s$  を持つ  $n < 5$  のポリトロープを差分法で計算するにあたり、離散化された  $\xi$  の格子間隔  $\Delta\xi$  よりも高い精度で半径の値を求めるには工夫を要する。素直な方法は  $\theta$  が正から負になる格子間隔を見つけ、その範囲で改めてより細かい格子を用いて高精度に解くことを必要な精度が得られるまで繰り返すことである。他に、独立変数を  $\xi$  でなく  $\theta$  にとって

$$\frac{d\xi}{d\theta} = -\frac{\xi^2}{\mu}, \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{d\mu}{d\theta} = -\frac{\xi^4\theta^n}{\mu} \quad (\text{B.14})$$

を  $\theta = 1$  から  $\theta = 0$  まで解く方法もある。この場合、 $\theta = 0$  の点は定義により表面となっているので、その点の  $\xi = \xi_s$  が半径を与える。初期値  $\theta = 1$  付近ではやはり  $\mu \rightarrow 0$  のため展開が必要で、今度は  $\theta = 1 - \epsilon$  に対して

$$\xi = \sqrt{6}\epsilon^{1/2} + \frac{3}{10}\sqrt{\frac{3}{2}}n\epsilon^{3/2} + \mathcal{O}(\epsilon^{5/2}) \quad (\text{B.15})$$

$$= \sqrt{6}\epsilon^{1/2} \left( 1 + \frac{3}{20}n\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right), \quad (\text{B.16})$$

$$\mu = 2\sqrt{6}\epsilon^{3/2} - \frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}n\epsilon^{5/2} + \mathcal{O}(\epsilon^{7/2}) \quad (\text{B.17})$$

$$= 2\sqrt{6}\epsilon^{3/2} \left( 1 - \frac{3}{20}n\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \quad (\text{B.18})$$

となる。

## 付録 C

# 第 4 章補遺

### C.1 場の多重極モーメント

重力源外部の真空領域での重力ポテンシャルは、天体の質量密度を積分して得られる換算多重極モーメント  $\mathcal{I}^L$  によって (4.28) 式のように展開できた。一般に Laplace 方程式  $\nabla^2\Phi = 0$  の遠方で正則な斉次解は  $1/r$  およびその微分によって与えられるので、対称トレースレステンソル  $Q_L$  を係数として

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_l \frac{1}{l!} \frac{Q_L x^L}{r^{2l+1}} \quad (\text{C.1})$$

のように展開できる。重力の場合、離れた複数の天体もひとまとめに扱うとして、天体の重心を原点にとると  $Q^L = -(2l-1)!! G \mathcal{I}^L$  が成り立つ。このように場の展開から得られる換算多重極モーメントテンソル  $Q_L$  を、この節では簡潔に多重極モーメントと呼ぶ。この多重極モーメント  $Q_L$  が、質量密度の積分によって得られる換算多重極モーメント  $\mathcal{I}^L$  と同様、座標の回転に対してテンソルとして変換することは定義より明らかである (のでそう呼んだ)。Newton 重力の範疇ならテンソルとしての意味付けはこれで十分であり、一定のテンソル場  $Q_L(\mathbf{x}) = Q_L$  が全領域に存在すると考えることも正当化できる。

一般相対論で表れるような曲がった空間を考えると、上記の議論はほぼ全てが少なくとも直接的には拡張できず、Newton 重力の段階から  $Q_L$  がどのような意味でどこにあるテンソルか精査しておくことが望ましい\*1。例えば、座標の並進によって原点が取り替えられると展開の仕方も変わることに伴い、展開係数である  $Q_L$  が特徴的な並進依存性を示すことは、拡張における有用な指針となる。そこでこの節では、並進依存性に着目しつつ、Newton 重力の範疇で多重極モーメントの特徴付けを掘り下げておく。

#### C.1.1 テンソル場としての多重極モーメント

原点からの位置ベクトル  $\mathbf{x}$  および距離  $r := |\mathbf{x}|$  を用いた展開であることからわかる通り、多重極モーメントは展開の原点に依存する。原点を  $\mathbf{X}$  に取り替え  $\mathbf{x}' := \mathbf{x} - \mathbf{X}$  によって展開するとき、並進の大きさ  $X := |\mathbf{X}|$  は系の特徴的なサイズ\*2より十分小さいとして一次の項までに着目すると、多重極モーメントは

$$Q'_L = Q_L - l(2l-1)Q_{\langle L-1 X_i \rangle} + \mathcal{O}(X^2) \quad (\text{C.2})$$

\*1 ここでは記載しないが (今後するかもしれないが)、Newton 重力を議論する平坦な空間では、共形 Killing ベクトルが張る空間に作用する対称トレースレスの多重線形写像と見ることでもできる [R. Geroch, JMP 110, 1955-1961 (1970)]。その場合も、共形 Killing ベクトルをベクトル場として見れば下記の多重極モーメントテンソル場と同一視できる。

\*2 重力の場合であれば天体のサイズ  $R$  に相当し、 $\mathcal{O}(X)$  は  $\mathcal{O}(X/R)$  と読み替えた方が正確である。多重極モーメントを用いるなら  $R \sim (|Q_L|/|Q|)^{1/l}$  と見積もられる。

と変換される。これを示す上では、 $x^L$  の変化に伴う分はトレースとなって消えるため  $r^{2l+1}$  の変化しか効かないことを見て、 $(l-1)$  次の多重極モーメントの変化をもたらす

$$\frac{1}{(l-1)!} \nabla_i \left( \frac{1}{r^{2l-1}} \right) \Big|_{\mathbf{x}=0} X^i = \frac{l-(2l-1)X^i x_i}{l! r^{2l+1}} \quad (\text{C.3})$$

を考えるのが簡単であろう。任意の並進  $\mathbf{X}$  についても同様の計算によって多重極モーメントを求めることができ、それを無限小変換の積み重ねと捉えれば、一般の場合の変換則はここで導いた変換則から生成される。特に、無限小変換では自身より一つ次数の低い多重極モーメントしか表れないことから、一般の変換でも低次の多重極モーメントしか表れないことがわかる。

そこで、点  $\mathbf{x}$  を原点として  $\Phi$  を展開したときの多重極モーメントを、その点  $\mathbf{x}$  での値とするテンソル場  $Q_L(\mathbf{x})$  を定義することにより、多重極モーメントを自然にテンソル場に拡張することができる。ほぼ同義反復であるが、このとき多重極モーメント  $Q_L$  は展開の原点における場  $Q_L(\mathbf{x})$  の値と理解でき、並進依存性は場の空間依存性に反映される。こうして得られる多重極モーメントテンソル場は次数  $l$  に対応して無数に存在するが、空間依存性が多重極モーメントの並進依存性から従うことの帰結として、それぞれが独立とはならない。まず、原点の取り替えに関する変換則が自身より低次の多重極モーメントしか含まないことから、 $l$  次の多重極モーメントテンソル場  $Q_L(\mathbf{x})$  によって、それより低い次数の多重極モーメントテンソル場  $Q_{L-1}(\mathbf{x})$ ,  $Q_{L-2}(\mathbf{x})$ , ... も全て定まる。また、元となる場  $\Phi$  は一つ定めた原点に関する多重極モーメントだけで決まることを反映し、一点で次数  $l$  までの多重極モーメントの値が定まれば、 $l$  次までの多重極モーメントテンソル場そのものも一意に定まる。

### C.1.2 無限遠点のテンソルとしての多重極モーメント

場  $\Phi(\mathbf{x})$  から多重極モーメントを操作的に得ようとする、 $r$  を適切な数だけ掛けて  $r \rightarrow \infty$  で評価し、それを差し引いてまた同様に次の多重極モーメントを評価する、という方法が考えられる。しかし座標  $r$  やその極限操作が必要であることは、曲がった空間への拡張を考えると都合が良くない。球面調和関数をかけて球面で積分するなどの斉次解を用いる方法もありうるが、これも座標が必要で、さらに曲がった空間上の物理的な場が平坦な空間の Laplace 方程式を満たすことも普通はそもそも期待できず、やはり容易でない\*3。

これらの問題を解決する強力な方法は、空間に無限遠点を表す一点を付け加え、その上で多重極モーメントを求めることである [R. Geroch, JMP 110, 2580-2588 (1970)]。以下この節では、計量や接続係数など微分幾何の道具を用いて議論し\*4、直交座標で  $\delta_{ij}$  となる平坦な空間の計量を  $f_{ij}$  で表す。座標変換

$$\bar{x}^i = \frac{x^i}{r^2} \quad (\text{C.4})$$

を行えば、無限遠は  $\bar{x}^i \rightarrow 0$  に移るので、そこで様々な解析を行えばよさそうである。しかし微小距離離れた二点間の距離を表す線素は

$$ds^2 := f_{ij} dx^i dx^j = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{C.5})$$

$$= \frac{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2}{\bar{r}^4} \quad (\text{C.6})$$

\*3 一方、 $\mathcal{I}_L$  の計算には位置ベクトルをかける操作・体積積分する操作が必要だが、これらはいずれも拡張に難があり、事態はより悪い。

\*4 なるべく避けようとしたが、 $\omega$  依存性の議論で断念した。

と変換され、コンパクト化に伴って発散するため、このまま  $\bar{x}^i = 0$  を扱うことは難しい。そこで共形因子

$$\Omega := \bar{r}^2 \quad (\text{C.7})$$

を用いて計量を  $\bar{f}_{ij} = \Omega^2 f_{ij}$  と共形変換すると、それを用いて得られる線素は

$$d\bar{s}^2 := \bar{f}_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{C.8})$$

$$= d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 \quad (\text{C.9})$$

と  $\bar{x}^i = 0$  でも正則になる。このように共形変換を介することで、元の空間に無限遠点を表す  $\bar{x}^i = 0$  を付け加え、その上での場の振る舞いによって極限操作なしに無限遠での漸近的な振る舞いを解析できるようになる。ここで用いた変換では  $\Omega = \bar{r}^2 = 1/r^2$  となっているが、無限遠点を付け加える上では無限遠での振る舞いが適切であれば十分である。これを反映して、共形因子は  $\Omega \rightarrow 0$  で  $\omega = 1 + \mathcal{O}(\Omega^{1/2})$  と振る舞う関数  $\omega$  によって  $\Omega' = \omega\Omega$  と変換するゲージ自由度を持つ。

多重極モーメントは、共形変換された場

$$\bar{\Phi} = \Omega^{-1/2} \Phi \quad (\text{C.10})$$

$$= \sum_l \frac{1}{l!} Q_L \bar{x}^L \quad (\text{C.11})$$

およびその  $\bar{x}^i$  による微分の  $\bar{x}^i = 0$  における値として、 $\bar{f}_{ij}$  の共変微分を  $\bar{\nabla}_i$  と書けば

$$Q_L = \bar{\nabla}_L \bar{\Phi} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}=0} \quad (\text{C.12})$$

により求められる<sup>\*5</sup>。前述した展開の原点への依存性は、この定式化では  $\omega$  への依存性として表される。まず原点を  $\mathbf{x} = \mathbf{X}$  に取り替えると、 $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{X}$  に対応した  $\Omega' = 1/r'^2$  は

$$\Omega' = \left[ 1 + \frac{2\mathbf{X} \cdot \mathbf{x}}{r^2} + \mathcal{O}(X^2) \right] \Omega \quad (\text{C.13})$$

となる。ここから、 $\omega = 1 + 2\mathbf{X} \cdot \mathbf{x}/r^2 + \mathcal{O}(X^2) = 1 + 2\mathbf{X} \cdot \bar{\mathbf{x}} + \mathcal{O}(X^2)$  によるゲージ変換が並進を表すことが読み取れる。次に共形因子を  $\Omega' = \omega\Omega$  に変更したときの  $\bar{\Phi}' = \Omega'^{-1/2} \Phi = \omega^{-1/2} \bar{\Phi}$  を考えると、 $\bar{f}'_{ij} = \Omega'^2 f_{ij}$  の共変微分を  $\bar{\nabla}'_i$  とし、 $\omega - 1$  の非線形項や高階微分が無視できる場合は<sup>\*6</sup>

$$\bar{\nabla}'_L \bar{\Phi}' = \omega^{-1/2} \bar{\nabla}_L \bar{\Phi} - \frac{l(2l-1)}{2} \omega^{-3/2} \bar{\nabla}_{\langle L-1} \bar{\Phi} \bar{\nabla}_{i)} \omega \quad (\text{C.14})$$

が成り立つ。これは  $l=1$  の場合はすぐに示され、後は数学的帰納法により、 $\bar{\nabla}'_i$  と  $\bar{\nabla}_i$  との差を表す接続係数

$$\bar{C}^k{}_{ij} = \frac{1}{2} \bar{f}'^{kl} (\bar{\nabla}_i \bar{f}'_{jl} + \bar{\nabla}_j \bar{f}'_{il} - \bar{\nabla}_l \bar{f}'_{ij}) \quad (\text{C.15})$$

$$= \omega^{-1} (\delta^k{}_j \bar{\nabla}_i \omega + \delta^k{}_i \bar{\nabla}_j \omega - \bar{f}'_{ij} \bar{f}'^{kl} \bar{\nabla}_l \omega) \quad (\text{C.16})$$

を用いて

$$\bar{\nabla}'_{iL} \bar{\Phi}' = \bar{\nabla}'_i \left[ \omega^{-1/2} \bar{\nabla}_L \bar{\Phi} - \frac{l(2l-1)}{2} \omega^{-3/2} \bar{\nabla}_{\langle L-1} \bar{\Phi} \bar{\nabla}_{l)} \omega \right] \quad (\text{C.17})$$

<sup>\*5</sup> 右辺が対称であることは今は自明で、トレースレスであることは  $\nabla^2 \Phi = 0$  が  $\bar{\nabla}^2 \bar{\Phi} = 0$  に変換されることから保証される。一般の共形変換では曲率が生じるため、変換後に対称とはならず、またスカラー曲率  $\bar{R}$  に対し  $\bar{\nabla}^2 \bar{\Phi} - \bar{R} \bar{\Phi}/8 = 0$  となる。

<sup>\*6</sup> この類の議論は普通は時空の漸近平坦性に関係して行われ、その場合の高階微分は低次の微分までの非線形項に書き換えられる。これらが無視できる場合は変換によって生じる曲率も無視できる。

$$\approx \omega^{-1/2} \bar{\nabla}_{iL} \bar{\Phi} - \frac{1}{2} \omega^{-3/2} \bar{\nabla}_{\langle L} \bar{\Phi} \bar{\nabla}_{i\rangle} \omega - l \omega^{-1/2} \bar{C}^k_{\langle il} \bar{\nabla}_{k(L-1)\rangle} \bar{\Phi} - \frac{l(2l-1)}{2} \omega^{-3/2} \bar{\nabla}_{\langle L} \bar{\Phi} \bar{\nabla}_{i\rangle} \omega \quad (\text{C.18})$$

$$= \omega^{-1/2} \bar{\nabla}_{iL} \bar{\Phi} - \frac{(l+1)(2l+1)}{2} \omega^{-3/2} \bar{\nabla}_{\langle L} \bar{\Phi} \bar{\nabla}_{i\rangle} \omega \quad (\text{C.19})$$

から示せる。ただし添字  $l$  は  $l$  個の添字の組  $L$  の一つを表すものとし、またここでは左辺が対称トレースレスであることを利用して右辺も対称トレースレスの部分を取った。この変換則を  $\bar{x}^i = 0$  で評価すれば、多重極モーメントの変換則

$$Q'_L = Q_L - \frac{l(2l-1)}{2} Q_{\langle L-1} \bar{\nabla}_{i\rangle} \omega \quad (\text{C.20})$$

が導かれる。ここに先に求めた  $\omega$  の表式を代入すると、多重極モーメントは並進によって

$$Q'_L = Q_L - l(2l-1) Q_{\langle L-1} X_{i\rangle} + \mathcal{O}(X^2) \quad (\text{C.21})$$

と変換され、(C.2) 式を再現することが確かめられる。