第 4 回レポート問題
レポート表紙に氏名と学籍番号を明記してください。締切り 7 月 11 日金曜日 授業時

$\boxed{1}$ 電荷 e、質量 m の荷電粒子が、Coulomb 引力 (電場 $\boldsymbol{E} \propto -\nabla(1/r)$) によって原点まわりに等速円運動している系を考える。荷電粒子とともに動いている座標系 —以後固有系と呼ぶ— は慣性系ではないが、各瞬間、瞬間には、その時々の荷電粒子の速度 $\boldsymbol{v}$ と同じ速度で動いている慣性系で近似できると考えて良い。

以下の設問 (1)–(4) では、円運動の平面を x-y 平面に採り、全ての速度・位置ベクトルは、この平面内のものに限ることとする。したがって、例えば、速度 $\boldsymbol{v}$ は 2 次元ベクトル $(v_x,\, v_y)$ を、時空座標 x^μ は 3 次元の $(ct,\, x,\, y)$ を表す。c は光速である。

さて、実験室系 O から、速度 $\boldsymbol{v}$ で動いている慣性系 O' への Lorentz 変換は、一般に

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{2} \Lambda(\boldsymbol{v})^\mu{}_\nu\, x^\nu, \quad x^\mu \equiv \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \end{pmatrix} \tag{1}$$

と書け、特に、$\boldsymbol{v}$ が x-軸方向 ($\boldsymbol{e}_x$: x 方向単位ベクトル) を向いている場合、

$$\Lambda(\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_x) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \Lambda_x(v), \qquad \left(\beta \equiv \frac{v}{c},\, \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{2}$$

である。

(1) 実験室系 O から見て速度 $\boldsymbol{w}$ で動いている物体は、$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_x$ で動いている慣性系 O' から見れば速度は $\boldsymbol{w}'$ に見える。$\boldsymbol{w}' = (w'_x,\, w'_y)$ を $\boldsymbol{w} = (w_x,\, w_y)$ で表す式を求めよ。

(2) $\boldsymbol{v}$ が x-軸を向いている場合の Lorentz 変換は (2) で与えられたが、$\boldsymbol{v}$ が x-軸と角度 θ を成して $(v_x,\, v_y) = (v\cos\theta,\; v\sin\theta)$ となる場合の Lorentz 変換 $\Lambda(\boldsymbol{v})$ は、O、O' のそれぞれで座標系を角度 θ だけ空間回転すれば、(2) の場合に帰着できて、

$$\Lambda(\boldsymbol{v}) = R^{-1}(\theta)\Lambda_x(v)R(\theta) \tag{3}$$

の形に書ける。3×3 行列 $\Lambda(\boldsymbol{v})$ のあらわな表式を求めよ。

(3) (3) 式の形の Lorentz 変換でつながる二つの座標系は、お互いから見て座標軸が回転していないと見なし得るので、準平行と呼ばれる。
荷電粒子と共に動く固有系は、時々刻々それに対応する慣性系が、次々と互いに準平行な Lorentz 変換でつながっていくようなものである。
すなわち、時刻 t の固有系に対応する慣性系 O' から、無限小時間 dt 後の慣性系 O'' への Lorentz 変換は、速度 $d\boldsymbol{v}'$ の準平行 Lorentz 変換

$$x'' = \Lambda(d\boldsymbol{v}')x'$$

で与えられる。ただし、$d\boldsymbol{v}'$ は、O' から見た O'' の速度である。(図 1 参照)
実験室系で見て、時刻 t の荷電粒子の速度が $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_x$、時刻 $t+dt$ での速度が $\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$, $d\boldsymbol{v} = dv\boldsymbol{e}_y$ ($\boldsymbol{e}_y$: y 方向単位ベクトル) とした時、$d\boldsymbol{v}'$ を dv の一次のオーダーで求めよ。
また、準平行 Lorentz 変換 $\Lambda(d\boldsymbol{v}')$ のあらわな表式を同じオーダーで求めよ。

(4) 時刻 t の慣性系 O' の座標軸は、実験室系 O の座標と準平行に揃えてあった、すなわち、$x' = \Lambda(\boldsymbol{v})x$、としよう。ところが、$dt$ 秒後の、O' を準平行に Lorentz 変換した O'' : $x'' = \Lambda(d\boldsymbol{v}')x'$ の座標軸は、実験室系から直接、速度 $\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$ で準平行 Lorentz 変換した慣性系 $O''_{\parallel} : x''_{\parallel} = \Lambda(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v})x$ の座標軸とは一致せず、ある角度 $d\alpha$ だけ空間回転した関係になっている。これを示し、回転角 $d\alpha$ を dv の一次のオーダーで求めよ。($|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}| = v$ に注意。)

(5) 3 次元空間ベクトルの記号を使えば、この空間回転の角速度は、$1/c^2$ のオーダーで

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \frac{-e}{2mc}\frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}}{c}$$

と書けることを示せ。ただし、粒子の運動方程式 $m\boldsymbol{a} = e\boldsymbol{E}$ を用いた。

(この結果は、固有系で静止しているスピン $\boldsymbol{S}$ があったとすると、実験室系からみれば角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転していることを意味する。これが Thomas 歳差と呼ばれるものである。)

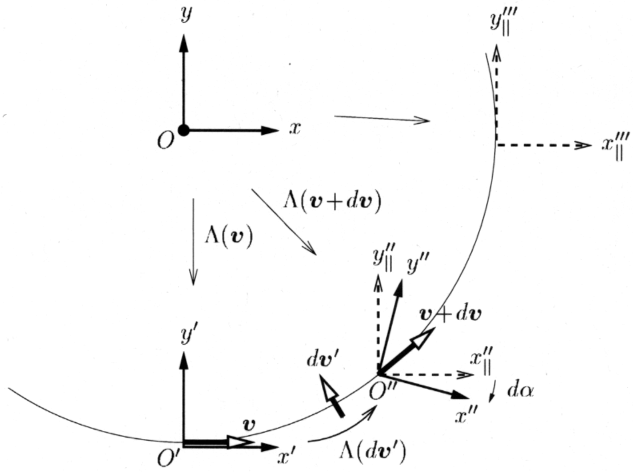

図 1 : 固有系に対応する時刻 t の慣性系 O'(実線座標系) から、時刻 $t + dt$ の慣性系 O''(実線座標系) への準平行 Lorentz 変換 $\Lambda(d\boldsymbol{v}')$。点線の座標系は実験室系の座標系 O に準平行な座標系を表す。