第 3 回レポート問題 (6/20 出題、6/27 締切) の解答

(平成 20 年 7 月 3 日版)

$\boxed{1}$ 導体中でオームの法則が成立している準定常な設定での Maxwell 方程式

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}, \quad \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{j}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

を考えよう。ここで、透磁率 μ と電気伝導率 σ は定数とみなし、導体は無限にひろがっているものとする。

1. 電場がスカラーポテンシャルに依存しないと仮定する (電場の源が、磁場の時間変動によるものだけであるとみなす)。このときベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が次の拡散方程式に従うことを示せ

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{2}$$

2. 無限に拡がった空間での拡散方程式 (2) の解は Green 関数による表示

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) = \int G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}', t) \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}', 0) d^3 x' \tag{3}$$

   で与えられる。ここで、$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}', 0)$ は時刻 $t = 0$ でのベクトルポテンシャルである。式 (3) の物理的解釈をのべよ。

   また、空間変数についての Fourier 変換 ($f(\boldsymbol{x}, t) = \int \hat{f}(\boldsymbol{k}, t) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} d^3 k$) により式 (2) を解いて、Green 関数が

$$G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}', t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{\frac{-k^2 t}{\mu\sigma}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')} d^3 k \tag{4}$$

   となることを示せ。ここに、$k = |\boldsymbol{k}|$ であり、$t > 0$ である。

3. この Green 関数 $G(\boldsymbol{x}, t)$ は非斉次の拡散方程式

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 G = \delta(\boldsymbol{x}) \delta(t) \tag{5}$$

   の解になっている。これを確認してみよう。まず、(5) 式の両辺を時間と空間について Fourier 変換をして ($f(\boldsymbol{x}, t) = \int \hat{f}(\boldsymbol{k}, \omega) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} + \omega t)} d^3 k d\omega$)、$\hat{G}(\boldsymbol{k}, \omega)$ の表式を求めよ。次に周波数 ω についての積分を行うことにより、(4) 式が得られることを確認せよ。

4. 式 (4) の積分を実行して Green 関数が

$$G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}', t) = \left(\frac{\mu\sigma}{4\pi t} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{-\mu\sigma |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^2}{4t} \right) \tag{6}$$

   と表せることを示せ。(これは境界のない 3 次元空間中の拡散方程式の Green 関数である。拡散方程式は熱伝導方程式とも呼ばれ、この Green 関数は熱核 (heat kernel) と呼ばれることもある)。

5. 時刻 $t = 0$ に $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, 0)$ がゼロでない領域が局在しているとしよう。この局在している部分を原点のまわりに大きさ d の領域として、原点から遠く離れた点 $\boldsymbol{x}$ ($|\boldsymbol{x}| \gg d$) で、この場の時間変動を観測する。この時間変動には、3 つの振舞いがあることを示し、それぞれの振舞いが観測される時間帯を $0 < t \leq T_1$, $T_1 \leq t \leq T_2$, $t \gg T_2$ とするときの T_1, T_2 を与えよ。最後の時間帯ではベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$ は近似的にどう表されるか？

1. 仮定から $\boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{A}/\partial t$ であるので、$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{j} = \mu\sigma \boldsymbol{E}$ より、$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \mu\sigma(-\partial \boldsymbol{A}/\partial t)$ である。$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ とゲージを選ぶことによって拡散方程式を得る。

2. 式 (3) の物理的解釈は、左辺の時刻 t、位置 $\boldsymbol{x}$ でのベクトルポテンシャルが、過去の時刻 $t = 0$、位置 $\boldsymbol{x}'$ でのベクトルポテンシャルの影響が積分核 $G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}', t)$ を通じて決定される、ということである (全ての位置 $\boldsymbol{x}'$ からの影響があるはずなので、$\boldsymbol{x}'$ について積分されている)。

   次に Green 関数の表式であるが、まず、$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$ を空間について Fourier 変換して、拡散方程式を解くことから初める。
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) = \int \hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{k}, t) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} d^3k$$
   を拡散方程式に代入すると、
$$-k^2 \hat{A}(\boldsymbol{k}, t) = \mu\sigma \frac{d\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{k}, t)}{dt}$$
   となる。この解は、$\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{k}, t) = \hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{k}, 0)e^{-k^2 t/(\mu\sigma)}$ から、
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) = \int e^{-\frac{k^2 t}{\mu\sigma}} \hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{k}, 0) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} d^3k$$
   となる。一方で、Green 関数を用いた解の表現で、$G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}', t), \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}', 0)$ を Fourier 変換表示することによって、次のような表現を得る。これらを比較すればよい。
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) &= \int \left[\int \hat{G}(\boldsymbol{k}, t) e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} d^3k\right] \left[\int \hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}, 0) e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}'} d^3q\right] d^3x' \\
&= \int \hat{G}(\boldsymbol{k}, t) \hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}, 0) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \left[\int e^{i(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}'} d^3x'\right] d^3k d^3q \\
&= (2\pi)^3 \int \hat{G}(\boldsymbol{k}, t) \hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}, 0) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \delta(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{k}) d^3k d^3q \\
&= (2\pi)^3 \int \hat{G}(\boldsymbol{k}, t) \hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{k}, 0) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} d^3k
\end{aligned}$$
   以上の比較によって、
$$\hat{G}(\boldsymbol{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-\frac{k^2 t}{\mu\sigma}}$$
   となるので題意を得る。

3. 時空間の Fourier 変換によって、非斉次の拡散方程式は次のようにかける。
$$\int \left(i\omega + \frac{k^2}{\mu\sigma}\right) \hat{G}(\boldsymbol{k}, \omega) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} + \omega t)} d^3k d\omega = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} d^3k \times \frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega t} d\omega$$
   これから、$\hat{G}(\boldsymbol{k}, \omega) = \dfrac{1}{(2\pi)^4} \dfrac{1}{i\omega + \frac{k^2}{\mu\sigma}}$ である。周波数についての積分は、複素積分で経路を実軸を通り、孤立特異点 $\omega = ik^2/(\mu\sigma)$ を囲む $\omega > 0$ での半円で半径を無限大にすることにより計算できる。すなわち、
$$\hat{G}(\boldsymbol{k}, t) = \int \hat{G}(\boldsymbol{k}, \omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-ie^{i\omega t}}{\omega - i\frac{k^2}{\mu\sigma}} d\omega = \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-\frac{k^2 t}{\mu\sigma}}$$
   となって確かに (4) 式と一致する。

4. (4) 式の指数関数の引数を平方完成して Gauss 積分にもちこめばよい。すなわち、

$$-\frac{k^2 t}{\mu\sigma}+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}=-\frac{t}{\mu\sigma}k_j^2+ik_jx_j=-\frac{t}{\mu\sigma}\left(k_j-i\frac{\mu\sigma}{2t}x_j\right)^2-\frac{\mu\sigma}{4t}x_j^2$$

であるので、

$$G(\boldsymbol{x},\,t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\exp\left(-\frac{\mu\sigma}{4t}|\boldsymbol{x}|^2\right)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{t}{\mu\sigma}\left(k-i\frac{\mu\sigma}{2t}x\right)^2\right]dk\right\}^3=\frac{1}{(2\pi)^3}\exp\left(-\frac{\mu\sigma}{4t}|\boldsymbol{x}|^2\right)\left(\frac{\pi\mu\sigma}{t}\right)^{3/2}$$

となって題意を得る。

5. Green 関数を用いた表式は、

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\,t)=\left(\frac{\mu\sigma}{4\pi t}\right)^{3/2}\int\exp\left\{-\frac{\mu\sigma}{4t}|\boldsymbol{x}|^2\left[1-2\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}|^2}+\frac{|\boldsymbol{x}'|^2}{|\boldsymbol{x}|^2}\right]\right\}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}',0)\ d^3x' \qquad \ldots(*)$$

である。指数関数引数の [　　] の中身は $|\boldsymbol{x}'|\simeq d\ll|\boldsymbol{x}|$ であるので、右に行けば行くほど小さくなる。ただし $1/t$ がかかっていることに注意すると、一番小さい筈の第 3 項が無視できないのは、

$$\frac{\mu\sigma}{4t}|\boldsymbol{x}'|^2\simeq\frac{\mu\sigma}{t}d^2>1$$

であるときである。つまり $0<t\leq\mu\sigma d^2$ では [　　] の中身の全てを考慮する必要がある。次に、[　　] の中身で、第 3 項は無視できるが、第 2 項は無視できない時間帯がある。それは、

$$\frac{\mu\sigma}{4t}|\boldsymbol{x}'|^2\sim\frac{\mu\sigma}{t}d^2<1$$

かつ、

$$\frac{\mu\sigma}{2t}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}'\sim\frac{\mu\sigma}{t}d|\boldsymbol{x}|>1$$

が満たされるので、$\mu\sigma d^2\leq t\leq\mu\sigma d|\boldsymbol{x}|$ である。時刻が $t\geq\mu\sigma d|\boldsymbol{x}|$ では、[　　] の中身で、第 2, 3 項が無視できる。

以上をまとめると、$T_1=\mu\sigma d^2$, $T_2=\mu\sigma d|\boldsymbol{x}|$ である。まず $0<t\leq T_1=\mu\sigma d^2$ では、観測点 $\boldsymbol{x}$ でベクトルポテンシャルは $(*)$ 式のように振舞う。次に $T_1\leq t\leq T_2=\mu\sigma d|\boldsymbol{x}|$ では観測点 $\boldsymbol{x}$ でベクトルポテンシャルは近似的に

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\,t)\simeq\left(\frac{\mu\sigma}{4\pi t}\right)^{3/2}\int\exp\left\{-\frac{\mu\sigma}{4t}|\boldsymbol{x}|^2\left[1-2\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}|^2}\right]\right\}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}',0)\ d^3x'$$

のように振舞う。さらに、$t\geq T_2$ での近似的な振舞いは、

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\,t)\simeq\left(\frac{\mu\sigma}{4\pi t}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{\mu\sigma}{4t}|\boldsymbol{x}|^2\right)\int\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}',0)\ d^3x'$$

となる。