第 3 回レポート問題
レポート表紙に氏名と学籍番号を明記してください。締切り 6 月 27 日金曜日 授業時

$\boxed{1}$ 導体中でオームの法則が成立している準定常な設定での Maxwell 方程式

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}, \quad \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{j}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

を考えよう。ここで、透磁率 μ と電気伝導率 σ は定数とみなし、導体は無限にひろがっているものとする。

1. 電場がスカラーポテンシャルに依存しないと仮定する (電場の源が、磁場の時間変動によるものだけであるとみなす)。このときベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が次の拡散方程式に従うことを示せ
$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{2}$$

2. 無限に拡がった空間での拡散方程式 (2) の解は Green 関数による表示
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) = \int G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}', t)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}', 0) d^3x' \tag{3}$$
で与えられる。ここで、$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}', 0)$ は時刻 $t = 0$ でのベクトルポテンシャルである。式 (3) の物理的解釈をのべよ。
また、空間変数についての Fourier 変換 ($f(\boldsymbol{x}, t) = \int \hat{f}(\boldsymbol{k}, t) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} d^3k$) により式 (2) を解いて、Green 関数が
$$G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}', t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{\frac{-k^2 t}{\mu\sigma}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')} d^3k \tag{4}$$
となることを示せ。ここに、$k = |\boldsymbol{k}|$ であり、$t > 0$ である。

3. この Green 関数 $G(\boldsymbol{x}, t)$ は非斉次の拡散方程式
$$\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 G = \delta(\boldsymbol{x})\delta(t) \tag{5}$$
の解になっている。これを確認してみよう。まず、(5) 式の両辺を時間と空間について Fourier 変換をして ($f(\boldsymbol{x}, t) = \int \hat{f}(\boldsymbol{k}, \omega) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} + \omega t)} d^3k d\omega$)、$\hat{G}(\boldsymbol{k}, \omega)$ の表式を求めよ。次に周波数 ω についての積分を行うことにより、(4) 式が得られることを確認せよ。

4. 式 (4) の積分を実行して Green 関数が
$$G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}', t) = \left(\frac{\mu\sigma}{4\pi t}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{-\mu\sigma|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^2}{4t}\right) \tag{6}$$
と表せることを示せ。(これは境界のない 3 次元空間中の拡散方程式の Green 関数である。拡散方程式は熱伝導方程式とも呼ばれ、この Green 関数は熱核 (heat kernel) と呼ばれることもある)。

5. 時刻 $t = 0$ に $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, 0)$ がゼロでない領域が局在しているとしよう。この局在している部分を原点のまわりに大きさ d の領域として、原点から遠く離れた点 $\boldsymbol{x}$ $(|\boldsymbol{x}| \gg d)$ で、この場の時間変動を観測する。この時間変動には、3 つの振舞いがあることを示し、それぞれの振舞いが観測される時間帯を $0 < t \leq T_1$, $T_1 \leq t \leq T_2$, $t \gg T_2$ とするときの T_1, T_2 を与えよ。最後の時間帯ではベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$ は近似的にどう表されるか？