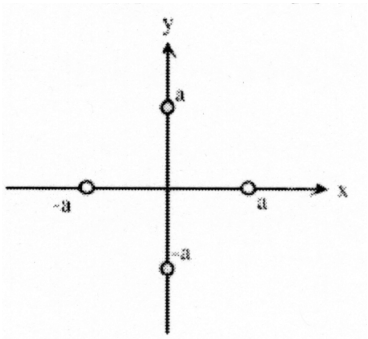
第 2 回レポート問題 (5/30 出題、6/6 締切) の解答

(平成 20 年 6 月 24 日版)

$\boxed{1}$

1. 原点を通り z 方向に無現に長いワイヤーがある。これが線電荷密度 λ で一様に帯電している時、点 (x, y, z) における電場の大きさを求めよ。ワイヤーの太さは無視出来るものとする。これよりこのワイヤーが作る静電ポテンシャル $\phi(x, y, z)$ を求めよ。但しポテンシャルの基準は $\phi(a, 0, 0) = 0$ と定めよ。



2. 同様のワイヤーが 4 本、左図のように配置されている。但し x 軸上の位置 $(\pm a, 0, 0)$ を通るワイヤーは $+\lambda$、y 軸上の位置 $(0, \pm a, 0)$ を通るものは $-\lambda$ の線密度を有する。原点付近の点 (x, y, z) に於ける静電ポテンシャル $\phi(x, y, z)$ を、微少量 $(x/a, y/a)$ の 2 次のオーダーまで求めよ。また、x-y 平面上原点付近での等電位線の概略を図示せよ。この場はなんと呼ばれるか？x-y 平面内を考えると荷電粒子は 1 方向には収斂する力を受けるがこれと垂直な方向には発散する力を受けることを示せ。

3. 今度は帯電したワイヤーの代わりに電流 I の流れるワイヤーを考えよう。x 軸上 $\pm a$ を通るワイヤーには $+I\hat{z}$、y 軸上 $\pm a$ を通るワイヤーには $-I\hat{z}$ の電流を流す。但し $\hat{z}$ は z 方向の単位ベクトルである。原点付近の点 (x, y, z) に於けるベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ を求めよ。これより原点付近での磁場の大きさ $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$ を求めよ。(ヒント) 静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \displaystyle\int \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}\, d^3x'$ とベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \displaystyle\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}\, d^3x'$ の類似性に注意せよ。ここで ρ および $\boldsymbol{j}$ は電荷密度及び電流密度、また ϵ_0 及び μ_0 は真空中での誘電率及び透磁率を表す。

4. (次問への準備) 一般に、局在した定常電流密度分布 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ が外部静磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ から受ける力 $\boldsymbol{F}$ を考慮し、密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ がつくる磁気双極子モーメント $\boldsymbol{M} = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}'$ からの $\boldsymbol{F}$ の寄与が $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{B})$ となることを示せ (ヒント: 力 $\boldsymbol{F}$ の表式で外部磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}')$ を $\boldsymbol{x}'$ についてテイラー展開する)。

5. 原点付近に置かれた中性子の運動を考えよう。荷電粒子と異なり中性子は磁気双極子モーメント $(\boldsymbol{\mu}_n)$ と磁場の相互作用により力を受ける。中性子のスピンは $\dfrac{1}{2}\hbar$ であるので、スピン方向は磁場と平行または反平行の状態が許される。もし中性子の感ずる磁場の変化が緩やか (断熱的) ならば、中性子のスピン (従って磁気双極子モーメント) は磁場の変化に追随し、常に平行または反平行状態を保つ。この結果、あるスピン状態の中性子に関しては前問の磁場の原点付近において x-y 平面内のどの方向にも復元力が働く。復元力の大きさを求めよ。(なおこの問題に於いては z 方向は無限に長いと仮定した。しかし実際の実験では z 方向についても円形に閉じているトーラス状磁場を用い中性子を閉じ込める。)

1. 電場をガウスの定理から求めて、静電ポテンシャルを導く。系の対称性から電場は、ワイヤーを中心した円筒座標系での動径成分 E_r のみである。ワイヤーを中心として、半径 R、厚さ l の円筒でガウ

スの定理を体積積分すると円筒側面からの寄与のみであるから

$$E_r(R)2\pi Rl = \frac{1}{\epsilon_0}\lambda l$$

となり、$E_r(R) = \lambda/(2\pi\epsilon_0 R)$ となる。静電ポテンシャルは $E_r(R) = -\partial\phi(R)/\partial R$ で与えられるので、$\phi(R) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\log r + \phi_0$ となる。$\phi(a) = 0$ より定数 ϕ_0 が決まり、

$$\phi(x,\, y,\, z) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\log\left(\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

となる。

(積分 $\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\,d^3x'$ を積分しても良い。このとき $\rho(x',\, y',\, z') = \lambda\delta(x')\delta(y')$ である。z' の積分は $-L$ から L までとして積分し $\phi(a,\, 0,\, 0) = 0$ として積分定数を決めよ。次に極限 $L \to \infty$ を考慮すればよい。)

2. 前問の結果から、

$$\begin{aligned}
\phi(x,\, y,\, z) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left[\log\left(\frac{a}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}\right) + \log\left(\frac{a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\right)\right. \\
&\qquad \left. - \log\left(\frac{a}{\sqrt{x^2+(y+a)^2}}\right) - \log\left(\frac{a}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}\right)\right] \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[-\log\left\{\left(1+\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2\right\} - \log\left\{\left(1-\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2\right\}\right. \\
&\qquad \left. + \log\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(1+\frac{y}{a}\right)^2\right\} + \log\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(1-\frac{y}{a}\right)^2\right\}\right]
\end{aligned}$$

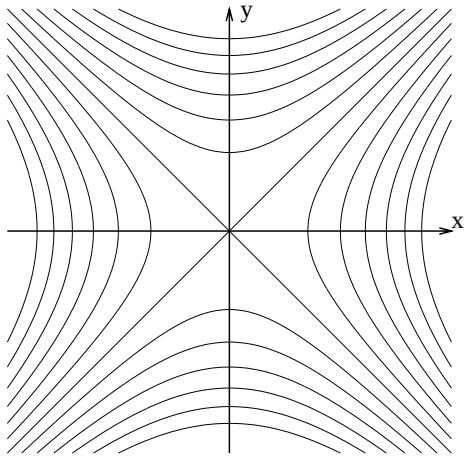
である。ここで微小量を $X = x/a,\, Y = y/a$ とおき、$\log(1+x) = x - x^2/2 + \text{h.o.t.}$ に注意すると (h.o.t. は高次項をあらわす)

$$\begin{aligned}
\log[(1+X)^2+Y^2] = \log[1+2X+X^2+Y^2] &= (2X+X^2+Y^2) - \frac{1}{2}(2X+X^2+Y^2)^2 + \ldots \\
&= 2X - X^2 + Y^2 + \text{h.o.t.}
\end{aligned}$$

となる。この展開を静電ポテンシャルの全ての log についておこなうと、

$$\phi(x,\, y,\, z) = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)^2\right] + \text{h.o.t.}$$

を得る。これは系の対称性とも整合する結果である (x を $-x$ にしても不変、y を $-y$ にしても不変、直線 $y = \pm x$ について折り返して λ を $-\lambda$ としても不変)。この等電位面は双曲線であたえられる (下図参照)。



この場は 4 重極子の作るもので、4 重極場と呼ばれる。電場は次のようになり、

$$
\begin{aligned}
E_x &= -\partial_x \phi(\boldsymbol{x}) = -\frac{2\lambda}{\pi\epsilon_0 a}\frac{x}{a} + \ldots, \\
E_y &= -\partial_y \phi(\boldsymbol{x}) = \frac{2\lambda}{\pi\epsilon_0 a}\frac{y}{a} + \ldots, \\
E_z &= -\partial_z \phi(\boldsymbol{x}) = 0
\end{aligned}
$$

正電荷については x 方向には復元力となり、y 方向には発散する力となる。

3. ベクトルポテンシャルは $A_x(x,\, y,\, z) = A_y(x,\, y,\, z) = 0$ であり、

$$
A_z(x,\, y,\, z) = \frac{\mu_0 I}{\pi}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)^2\right] + \text{h.o.t.}
$$

となる (前問の答で、λ を I にして、ϵ_0 を $1/\mu_0$ とすればよい)。ここから、磁場については、

$$
\begin{aligned}
B_x(x,\, y,\, z) &= \partial_y A_z = -\frac{2\mu_0 I}{\pi a}\frac{y}{a}, \\
B_y(x,\, y,\, z) &= -\partial_x A_z = -\frac{2\mu_0 I}{\pi a}\frac{x}{a}, \\
B_z(x,\, y,\, z) &= 0
\end{aligned}
$$

となるので、大きさは $|\boldsymbol{B}| = \dfrac{2\mu_0 I}{\pi a^2}|\boldsymbol{x}| = \dfrac{2\mu_0 I}{\pi a^2}\sqrt{x^2+y^2}$ である。

4. 電流密度分布 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ が局在している物体が外部磁場から受ける力 $\boldsymbol{F}$ は

$$
\boldsymbol{F} = \int_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}') d'\boldsymbol{x}
$$

で与えられる。積分範囲の V は物体の全領域である。物体が原点近傍にあり、外部磁場の空間変動のスケールにくらべて物体の大きさが小さいとして外部磁場を原点近傍でテイラー展開して、$\boldsymbol{F}$ を評価する。力の a 成分は次のようになる

$$
\begin{aligned}
F_a &= \int d\boldsymbol{x}' \epsilon_{abc}\ J_b(\boldsymbol{x}')\ \left[B_c(\boldsymbol{0}) + x'_d \left(\frac{\partial B_c}{\partial x'_d}\right)\bigg|_{\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{o}} + \text{h.o.t.}\right] \\
&= \epsilon_{abc}\left[\int_V J_b(\boldsymbol{x}')\ d\boldsymbol{x}'\right] B_c(\boldsymbol{0}) + \epsilon_{abc}\left[\int_V x'_d J_b(\boldsymbol{x}')\ d\boldsymbol{x}'\right]\left(\frac{\partial B_c}{\partial x'_d}\right)\bigg|_{\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{o}} + \text{h.o.t.}
\end{aligned}
$$

まず、最右辺第一項はゼロになることを示し、次に最右辺第二項を磁気双極子モーメント $M_a = \frac{1}{2}\int \epsilon_{abc} x'_b J_c(\boldsymbol{x}') d\boldsymbol{x}'$ で表す。

(i)$\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})=0$ を示す。物体が電気的に定常であると、内部での電荷保存則 $\partial_t\rho+\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$ より $\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$ である。(ii) 恒等式 $\int_V\nabla\cdot[x_a\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})]d\boldsymbol{x}=\int_V J_a(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}+\int_V x_a\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$ が成り立つが、ここで $\int_V\nabla[x_a\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})]d\boldsymbol{x}=\int_{\partial V}[x_a\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})]\cdot\boldsymbol{n}dS=0$ である (電流は物体の表面 ∂V から外に出ていかない $\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}=0$)。よって、(i) とあわせて $\int_V J_a(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=0$ と結論できる。

ここで、$m_{bc}=\int x'_bJ_c(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}'$ とおくと、磁気双極子モーメントの a 成分は $M_a=\epsilon_{abc}m_{bc}/2$ とかける。F_a は

$$F_a=\epsilon_{abc}m_{db}\left(\frac{\partial B_c}{\partial x'_d}\right)\bigg|_{\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{o}}+\text{h.o.t.}$$

である。この F_a を M_a で表せばよい (m_{db} を M_a で表せばよい)。(iii)M_a の縮約をとると、$\epsilon_{abc}M_a=\epsilon_{abc}\epsilon_{ade}m_{de}/2=(\delta_{db}\delta_{ce}-\delta_{be}\delta_{cd})m_{de}/2=(m_{bc}-m_{cb})/2$ である。(iv)$m_{bc}+m_{cb}=0$ であることを示す。$\int_V\nabla\cdot(x_ax_b\boldsymbol{J})d\boldsymbol{x}=0$ であることから、$\int_V(x_bJ_a+x_aJ_b)d\boldsymbol{x}=0$ となるので $m_{bc}+m_{cb}=0$ である。以上から、$\epsilon_{abc}M_a=m_{bc}$ である。これから、

$$\begin{aligned}F_a &= \epsilon_{abc}\epsilon_{edb}M_e\left(\frac{\partial B_c}{\partial x'_d}\right)\bigg|_{\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{o}}+\text{h.o.t.}=(\delta_{ad}\delta_{ce}-\delta_{ae}\delta_{cd})M_e\left(\frac{\partial B_c}{\partial x'_d}\right)\bigg|_{\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{o}}+\text{h.o.t.}\\ &= M_c\left(\frac{\partial B_c}{\partial x'_a}\right)\bigg|_{\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{o}}-M_a\left(\frac{\partial B_c}{\partial x'_c}\right)\bigg|_{\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{o}}+\text{h.o.t.}\end{aligned}$$

となり、第 2 項は $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ より消えるので求める力が $(\boldsymbol{M}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}=\nabla(\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{B})$ となることが得られた。

5. このとき、中性子の磁気双極子モーメントは $\boldsymbol{M}=\mu_n\frac{\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|}$ とおける ($\mu_n=\pm\frac{\hbar}{2}$)。中性子が受ける力は

$$\boldsymbol{F}=\nabla(\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{B})=\mu_n\nabla|\boldsymbol{B}|=\mu_n\frac{2\mu_0I}{\pi a^2}\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$$

となる。よって $\mu_n=-\hbar/2$ のとき ($\boldsymbol{M}$ が外部磁場と反平行なとき) に $\boldsymbol{F}$ は復元力となって大きさは $\dfrac{\hbar\mu_0I}{\pi a^2}$ である。