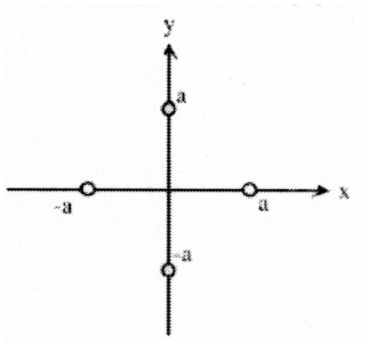
第 2 回レポート問題
レポート表紙に氏名と学籍番号を明記してください。締切り 6 月 6 日金曜日 授業時

1

1. 原点を通り z 方向に無現に長いワイヤーがある。これが線電荷密度 λ で一様に帯電している時、点 (x, y, z) における電場の大きさを求めよ。ワイヤーの太さは無視出来るものとする。これよりこのワイヤーが作る静電ポテンシャル $\phi(x, y, z)$ を求めよ。但しポテンシャルの基準は $\phi(a, 0, 0) = 0$ と定めよ。



2. 同様のワイヤーが 4 本、左図のように配置されている。但し x 軸上の位置 $(\pm a, 0, 0)$ を通るワイヤーは $+\lambda$、y 軸上の位置 $(0, \pm a, 0)$ を通るものは $-\lambda$ の線密度を有する。原点付近の点 (x, y, z) に於ける静電ポテンシャル $\phi(x, y, z)$ を、微少量 $(x/a, y/a)$ の 2 次のオーダーまで求めよ。また、x-y 平面上原点付近での等電位線の概略を図示せよ。この場はなんと呼ばれるか？x-y 平面内を考えると荷電粒子は 1 方向には収斂する力を受けるがこれと垂直な方向には発散する力を受けることを示せ。

3. 今度は帯電したワイヤーの代わりに電流 I の流れるワイヤーを考えよう。x 軸上 $\pm a$ を通るワイヤーには $+I\hat{z}$、y 軸上 $\pm a$ を通るワイヤーには $-I\hat{z}$ の電流を流す。但し $\hat{z}$ は z 方向の単位ベクトルである。原点付近の点 (x, y, z) に於けるベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ を求めよ。これより原点付近での磁場の大きさ $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$ を求めよ。(ヒント) 静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}\, d^3x'$ とベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}\, d^3x'$ の類似性に注意せよ。ここで ρ および $\boldsymbol{j}$ は電荷密度及び電流密度、また ϵ_0 及び μ_0 は真空中での誘電率及び透磁率を表す。

4. (次問への準備) 一般に、局在した定常電流密度分布 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ が外部静磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ から受ける力 $\boldsymbol{F}$ を考慮し、密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ がつくる磁気双極子モーメント $\boldsymbol{M} = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}'$ からの $\boldsymbol{F}$ の寄与が $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{B})$ となることを示せ (ヒント: 力 $\boldsymbol{F}$ の表式で外部磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}')$ を $\boldsymbol{x}'$ についてテイラー展開する)。

5. 原点付近に置かれた中性子の運動を考えよう。荷電粒子と異なり中性子は磁気双極子モーメント $(\boldsymbol{\mu}_n)$ と磁場の相互作用により力を受ける。中性子のスピンは $\frac{1}{2}\hbar$ であるので、スピン方向は磁場と平行または反平行の状態が許される。もし中性子の感ずる磁場の変化が緩やか (断熱的) ならば、中性子のスピン (従って磁気双極子モーメント) は磁場の変化に追随し、常に平行または反平行状態を保つ。この結果、あるスピン状態の中性子に関しては前問の磁場の原点付近において x-y 平面内のどの方向にも復元力が働く。復元力の大きさを求めよ。(なおこの問題に於いては z 方向は無限に長いと仮定した。しかし実際の実験では z 方向についても円形に閉じているトーラス状磁場を用い中性子を閉じ込める。)