

第1回レポート問題 (5/9 出題、5/16 締切) の解答

(平成 20 年 6 月 2 日版)

① ベクトル $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ について以下の関係が成り立つことを示せ。

$$1. \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

$$2. \frac{d|\mathbf{A}|^2}{dt} = 2\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt}, \quad \frac{d}{dt} \left(\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right) = \mathbf{A} \times \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}$$

$$3. \mathbf{a}(t) \equiv \mathbf{A}(t)/|\mathbf{A}(t)| \text{ とするとき、} \frac{d\mathbf{a}}{dt} = -\frac{1}{|\mathbf{A}|} \left[\mathbf{a} \times \left(\mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right) \right]$$

いずれも簡単な計算。しかし最後のは意地悪い。

1. 成分表示で書く。 $[\dots]_i$ は i 成分をあらわすことにする。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \frac{d}{dt}(A_j B_j) = \frac{dA_j}{dt} B_j + A_j \frac{dB_j}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \\ \left[\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \right]_i &= \frac{d}{dt} \epsilon_{ijk} A_j B_k = \epsilon_{ijk} \frac{dA_j}{dt} B_k + \epsilon_{ijk} A_j \frac{dB_k}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} \right]_i + \left[\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right]_i \end{aligned}$$

2. 成分表示で書く。

$$\begin{aligned} \frac{d|\mathbf{A}|^2}{dt} &= \frac{d}{dt}(A_j A_j) = 2A_j \frac{dA_j}{dt} = 2\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt}, \\ \left[\frac{d}{dt} \left(\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right) \right]_i &= \frac{d}{dt} \left(\epsilon_{ijk} A_j \frac{dA_k}{dt} \right) = \epsilon_{ijk} \frac{dA_j}{dt} \frac{dA_k}{dt} + \epsilon_{ijk} A_j \frac{d^2 A_k}{dt^2} = \epsilon_{ijk} A_j \frac{d^2 A_k}{dt^2} = \left[\mathbf{A} \times \frac{d^2 \mathbf{A}}{dt^2} \right]_i \end{aligned}$$

3. まずは成分表示して時間微分をとる。

$$\frac{d}{dt} \frac{A_i}{|\mathbf{A}|} = \frac{A'_i |\mathbf{A}| - A_i \frac{d|\mathbf{A}|}{dt}}{|\mathbf{A}|^2}$$

となり、 $\frac{d}{dt} |\mathbf{A}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt}$ に注意すると

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \left[\frac{d\mathbf{A}}{dt} - \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \left(\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right) \right]$$

となる。これは問題の式の右辺と等しい。

② ガウスの法則 ($\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$) を用いて以下のことを示せ (必要であれば静電場の性質、閉曲線にそった電場の線積分がゼロ: $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ を使ってもよい)。

1. 導体に付加された電荷は表面に分布しなければいけない。(導体中で、その内部の電荷は印加された電場の下で自由に動けるものとせよ)
2. 内部が空洞である導体の閉じた膜を考える。この膜の外におかれた電荷による電場は膜内部には達しない。しかし膜内部におかれた電荷による電場は膜外部に達する。
3. 広い導体平面に一樣に電荷が面密度 σ で分布している。この電荷がつくる電場は表面に垂直で大きさが σ/ϵ_0 である。

1. 導体内部に電荷分布 $\rho(x)$ ができたとする。導体内に仮想的に閉曲面 V をとり、その内部でガウスの法則の体積分をすると

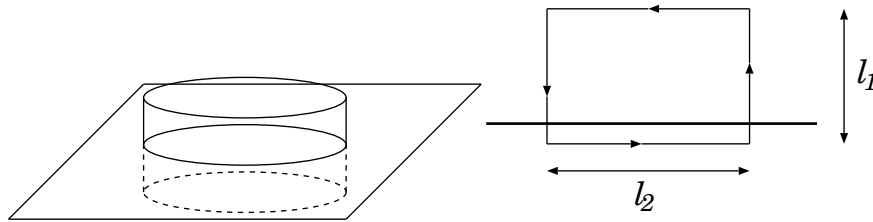
$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV = \int_{\partial V} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \, dS = \int_V \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \, dV$$

ここで最右辺はゼロでないので、閉曲面表面 ∂V 上には何らかの電場ができていることになる。しかし、この電場によって導体内で電荷はさらに動くことになる。結局、導体内部に電場ができなくなるまで (瞬間的に) 電荷は移動して静的な状態になる。従って、電荷は導体表面に分布せざるをえない。

2. 導体膜外部で導体膜を覆う仮想閉曲面 V をとってガウスの法則を適用する。導体膜外部の電場は導体膜内部の総電荷にのみ依存することがわかる。今、導体膜外部にも内部にも電荷がない場合は解は trivial である。内部に電荷があっても、導体膜上は等電位であり、その値は上の積分から外部電荷の存在に影響されない。今考えた仮想閉曲面の内側では方程式と境界条件は不変であり、解の一意性から内部解は導体外部の電荷に依存しない。(静電遮蔽)

一方で、導体内に電荷があれば、上のガウス積分は電荷がない場合とは別の値となる。したがって、外部解は導体内部の電荷には影響を受ける。

3. 導体平面を貫く薄い円筒面を考える (下左図)。上面は導体を含まず、下面は導体内にあるとする。



この円筒面でガウスの法則の体積分をする $\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV = \int_{\partial V} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \, dS$ が、ここで円筒の高さをゼロにする極限を考えると、面積分は上面からの寄与のみで、上面の面積を S とすると

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

である。ここで $\mathbf{n}$ は導体面の単位法線ベクトルである。つまり、 $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) = \sigma/\epsilon_0$ 、電場の面に垂直な成分の大きさがきまった。電場の面に平行な成分がゼロであることを次に $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ を用いて示す。(線積分をつかわずに、セッティングの対称性から明らかな、というのでもよい)。上右図の閉曲線で電場を線積分する (太線は導体平面の表面で、閉曲線は平面を垂直に貫く)

$$0 = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{m}) l_2 + [\mathbf{E} \cdot (-\mathbf{n})] l_1 + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) l_1 + [\mathbf{E} \cdot (-\mathbf{m})] l_2$$

($\mathbf{m}$ は上の線の単位方向ベクトル)。ループの左右線からの寄与は和をとるとゼロで、下線はそもそも電場がゼロである。結局、ループの上の線にそった線積分 $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{m}) = 0$ となるので、電場は導体面に平行な成分を持たないことがわかる。

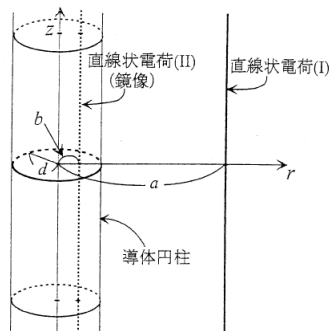
3 (鏡像法)

1. 真空中に電荷密度 ρ の電荷を分布させた場合、真空の誘電率を ϵ_0 として、静電ポテンシャル ϕ はポアソン方程式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (1)$$

の解として与えられる。真空中に単位長さあたりの電荷が λ の無限に長い一様な直線状電荷を z -軸上に置いたとき、そのまわりにできる静電ポテンシャル ϕ は $\phi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log r + c$ で与えられる。ただし、ここで $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ と定義した。また、 c は定数である。このときの電場 E を求めよ。また、この与えられた電荷分布、および、静電ポテンシャル ϕ に対して、 $r \leq r_0$ で長さが l の z -軸に平行な円柱状領域で、式 (1) の両方をそれぞれ体積分した量が等しくなることを、ガウスの定理を用いて示せ。

図のように、 $r = 0$ の直線を中心とする半径が d の無限に長い導体円柱をおき、単位長さあたり λ' の電荷を帯電させる。この導体円柱に平行に、単位長さあたりの電荷が λ の直線状電荷 (I) を $r = a$ のところにおく。この状態での導体円柱外部の静電ポテンシャルを求めたい。そのために、図中に示したように、導体円柱内部の $r = b$ の位置に単位長さあたりの電荷が λ'' の直線状電荷 (II) を導体円柱の代わりに鏡像としておくことを考える。



図

2. 導体円柱を鏡像 (II) に置き換えたとき、鏡像 (II) によって作られる電場が導体円柱外部の元の電場を与えるように鏡像を置く位置や鏡像の持つ電荷の大きさを決める。今の場合、導体円柱表面に現れる単位長さあたりの電荷 λ' と、鏡像 (II) の線電荷密度 λ'' は等しくなければならない。このことを示せ。
3. $r \rightarrow \infty$ の極限で静電ポテンシャルが一定値に近づくようにする為には、 λ'' ($=\lambda'$) をどのように選ばよいか、答えよ。
4. 前問の λ'' の値に対して、鏡像 (II) によって作られる電場が元の導体円柱外部の電場を正しく与えるように b の値を求めよ。
5. 導体円柱にはたらく静電気力は、導体円柱を鏡像 (II) に置き換えたときに鏡像 (II) にはたらく静電気力に等しいことを示せ。
6. 導体円柱が問 3 の λ' の値に帯電している状態で、直線状電荷 (I) を $r = a$ の位置から $r = a'$ の位置まで十分にゆっくりと移動させる。この移動で、直線状電荷 (I) の単位長さあたりになされた仕事を求めよ。

1. 電場は動径成分のみで、 $E_\rho(r) = -\partial_r \phi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ である。つまり、円筒座標系で書くとき、 $E = (E_\rho, E_\theta, E_z) = (\lambda/(2\pi\epsilon_0 r), 0, 0)$ となる。

また、式 (1) を $\nabla \cdot (\nabla \phi) = -\rho/\epsilon_0$ と書き直す。この左辺を指定された円柱領域で体積分するとガウスの法則から

$$\int \nabla \cdot (\nabla \phi) dV = \int (\nabla \phi) \cdot \mathbf{n} dS = -E_\rho(r_0) 2\pi r_0 l = -\frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

となり、右辺を体積分すると

$$-\int \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = -\frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

であるので、式 (1) の両辺を体積分したものは等しい。

2. 導体円柱の作る電場を E' とおき、鏡像 (II) のつくる電場を E'' とおく。このとき、導体円柱と軸を同じにした半径 $r (\geq d)$ 高さ l の円柱領域で $\nabla \cdot E = \rho/\varepsilon_0$ をそれぞれ体積積分すると

$$\int \nabla \cdot E' dV = \int E' \cdot n dS = \lambda' l / \varepsilon_0,$$

$$\int \nabla \cdot E'' dV = \int E'' \cdot n dS = \lambda'' l / \varepsilon_0$$

となる。この両者が等しくなるので、 $\lambda' = \lambda''$ である。

3. 鏡像 (II) と線電荷 (I) がつくる静電ポテンシャル $\phi(x, y)$ は、線電荷 (I) が $(x, y) = (a, 0)$ にあるものとする、

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= -\frac{\lambda''}{4\pi\varepsilon_0} \log[(x-b)^2 + y^2] - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \log[(x-a)^2 + y^2] + c \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \log \left\{ [(x-b)^2 + y^2]^{\lambda''} [(x-a)^2 + y^2]^{\lambda} \right\} + c \end{aligned}$$

である。よって $\lambda'' = -\lambda$ であれば、無限遠でポテンシャルは一定になる。

4. 導体円柱の表面の元あった場所が等電位となる様に鏡像 (II) を設置すれば良い。

線電荷 (I) がつくるポテンシャル $\phi_I(x, y)$ は

$$\phi_I(x, y) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \log |\mathbf{x} - \mathbf{a}|,$$

である。但し $\mathbf{a} = (a, 0)$ 及び $\mathbf{x} = (x, y)$ である。一方で鏡像 (II) のそれは、

$$\phi_{II}(x, y) = -\frac{\lambda''}{2\pi\varepsilon_0} \log |\mathbf{x} - \mathbf{b}| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \log |\mathbf{x} - \mathbf{b}|,$$

$\mathbf{b} = (b, 0)$ である。従って、導体円柱の表面の元あった場所 $\mathbf{x} = (d \cos \theta, d \sin \theta)$ の位置でのポテンシャル $\phi|_{r=d}$ ($r = |\mathbf{x}|$) は、

$$\begin{aligned} \phi|_{r=d} &= (\phi_I + \phi_{II})|_{r=d} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \log \left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{b}|}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} \right) \Big|_{r=d} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \log \frac{d^2 + b^2 - 2bd \cos \theta}{d^2 + a^2 - 2ad \cos \theta}, \end{aligned}$$

である。これが θ の値に依らないので、 $\partial\phi/\partial\theta|_{r=d} = 0$ 即ち、

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \Big|_{r=d} = 0 &\iff \frac{2bd \sin \theta}{d^2 + b^2 - 2bd \cos \theta} - \frac{2ad \sin \theta}{d^2 + a^2 - 2ad \cos \theta} = 0 \\ &\iff b(d^2 + b^2 - 2bd \cos \theta) - a(d^2 + a^2 - 2ad \cos \theta) = 0 \\ &\iff (b-a)(d^2 - ab) = 0. \end{aligned}$$

当然 $b = a$ は求める解とは物理的に異なるので、 $d^2 = ab$ である。

$$b = \frac{d^2}{a}.$$

5. ポアソン方程式の解の一意性より、線電荷 (I) と鏡像 (II) とがつくる電位は、線電荷 (I) と導体円柱とがつくる電位と (導体円柱外部において) 同等である。従って、導体円柱が線電荷 (I) に及ぼす力

と鏡像 (II) が線電荷 (I) に及ぼす力も同等であり、作用・反作用の法則から線電荷 (I) が導体円柱に及ぼす力と線電荷 (I) が鏡像 (II) に及ぼす力が等しい。又、その単位長さあたりの大きさは

$$\lambda'' E_I(x=b, y=0) = \frac{\lambda\lambda''}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{b-a} e_x = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{a^2-d^2} e_x,$$

である。 E_I は線電荷 (I) がつくる電場、 e_x は x 方向の単位ベクトルである。

解答としては以上で充分であるが、ここでは更に導体円柱の電荷分布を具体的に求め、それから線電荷 (I) が導体円柱に及ぼす力を計算したい。その為にまず、線電荷 (I) と鏡像 (II) とがつくるポテンシャルから導体円柱表面の元あった場所における電場を求める。今、そのポテンシャルが

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_I + \phi_{II} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{b}|}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \frac{r^2 + b^2 - 2br \cos \theta}{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta},\end{aligned}$$

であるから、導体円柱表面上における電場 E_r (導体円柱表面外向) は、

$$E_r = -\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=d} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2d - 2b \cos \theta}{d^2 + b^2 - 2bd \cos \theta} - \frac{2d - 2a \cos \theta}{d^2 + a^2 - 2ad \cos \theta} \right),$$

となる。ここで、導体円柱表面上 ($d \cos \theta, d \sin \theta$) 近傍における方位角 $\Delta \theta$ の間に含まれる z 方向単位長さあたりの電荷を $\lambda_{\text{円柱}}(\theta) \Delta \theta / (2\pi)$ と置くと、導体円柱表面上の面電荷密度 $\sigma(\theta)$ と $\lambda_{\text{円柱}}(\theta) = 2\pi d \sigma(\theta)$ の関係がある。導体表面の電場と導体表面電荷密度の関係 (前大問の小問 3 参照) から、

$$\frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0} = E_r = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2d - 2b \cos \theta}{d^2 + b^2 - 2bd \cos \theta} - \frac{2d - 2a \cos \theta}{d^2 + a^2 - 2ad \cos \theta} \right).$$

従って、導体円柱表面上の電荷分布 $\lambda_{\text{円柱}}(\theta)$ は、

$$\lambda_{\text{円柱}}(\theta) = 2\pi d \sigma(\theta) = -\frac{\lambda d}{2} \left(\frac{2d - 2b \cos \theta}{d^2 + b^2 - 2bd \cos \theta} - \frac{2d - 2a \cos \theta}{d^2 + a^2 - 2ad \cos \theta} \right),$$

となる。これが実際に $\int_0^{2\pi} d\theta \frac{\lambda_{\text{円柱}}(\theta)}{2\pi} = -\lambda$ である事を見よう。複素数 $z = de^{i\theta}$ を導入すると、 $zz^* = d^2 = ab$ に注意して

$$\lambda_{\text{円柱}}(\theta) = -\frac{\lambda d}{2} \left(\frac{2d - (z + z^*)b/d}{|z - b|^2} - \frac{2d - (z + z^*)a/d}{|z - a|^2} \right) = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{z + a}{z - a} - \frac{z + b}{z - b} \right),$$

である (各自確かめよ)。これを θ に対して積分すれば良いので、 $\int_0^{2\pi} d\theta = \oint \frac{dz}{iz}$ に注意して

$$\int_0^{2\pi} d\theta \frac{\lambda_{\text{円柱}}(\theta)}{2\pi} = \oint \frac{dz}{iz} \frac{\lambda}{4\pi} \left(\frac{z + a}{z - a} - \frac{z + b}{z - b} \right) = -\lambda,$$

が求まる (これも、各自留数定理を用いて確かめよ)。但し、 $\oint$ により $|z| = d$ ($b < d < a$) の円周を反時計回りに一周回る積分を表す。

以上で導体円柱表面の電荷分布が得られたので、実際に線電荷 (I) が導体円柱に及ぼす力を計算しよう。対称性から、その力は x 方向にのみ存在する。方位角 $\Delta \theta$ の間に働く単位長さあたりの力は

$E_1 \lambda_{\text{円柱}} \Delta\theta / (2\pi)$ であるから、導体円柱に単位長さあたりに働く力の大きさ F_x は、

$$\begin{aligned}
 F_x &= \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\lambda_{\text{円柱}}(\theta)}{2\pi} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{r \cos\theta - a}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2} \Big|_{r=d} \\
 &= \oint \frac{dz}{iz} \frac{\lambda^2}{8\pi^2\epsilon_0} \left(\frac{z+a}{z-a} - \frac{z+b}{z-b} \right) \frac{(z+z^*) - 2a}{2|z-a|^2} \\
 &= \oint \frac{dz}{iz} \frac{\lambda^2}{16\pi^2\epsilon_0 a} \left(\frac{z+a}{z-a} - \frac{z+b}{z-b} \right) \left(\frac{a}{z-a} - \frac{z}{z-b} \right) \\
 &= \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{a-b} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{a^2-d^2},
 \end{aligned}$$

となる (やはり、これも各自確かめよ)。これは先に求めた力と一致する。

6. 線電荷 (I) と導体円柱との間に働く力が得られているので、これを積分して線電荷 (I) の単位長さあたりになされた仕事 W を求めれば良い。

$$W = \int_a^{a'} da'' \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{a''}{a''^2 - d^2} = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\log(a''^2 - d^2) \right]_a^{a'} = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \log \frac{a'^2 - d^2}{a^2 - d^2}.$$