

第 1 回レポート問題

レポート表紙に氏名と学籍番号を明記してください。締切り 5 月 16 日金曜日 授業時

- ① ベクトル $A(t)$, $B(t)$ について以下の関係が成り立つことを示せ。

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{d}{dt}(A \cdot B) = \frac{dA}{dt} \cdot B + A \cdot \frac{dB}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(A \times B) = \frac{dA}{dt} \times B + A \times \frac{dB}{dt} \\ 2. \quad & \frac{d|A|^2}{dt} = 2A \cdot \frac{dA}{dt}, \quad \frac{d}{dt}\left(A \times \frac{dA}{dt}\right) = A \times \frac{d^2 A}{dt^2} \\ 3. \quad & a(t) \equiv A(t)/|A(t)| \text{ とするとき、} \frac{da}{dt} = -\frac{1}{|A|} \left[a \times \left(a \times \frac{dA}{dt} \right) \right] \end{aligned}$$

- ② ガウスの法則 ($\nabla \cdot E = \rho/\epsilon_0$) を用いて以下のことを示せ (必要であれば静電場の性質、閉曲線にそった電場の線積分がゼロ: $\oint E \cdot dl = 0$ を使ってもよい)。

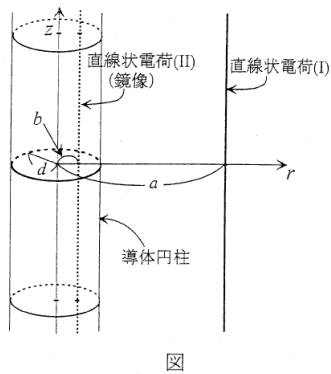
1. 導体に付加された電荷は表面に分布しなければならない。(導体中で、その内部の電荷は印加された電場の下で自由に動けるものとせよ)
2. 内部が空洞である導体の閉じた膜を考える。この膜の外におかれた電荷による電場は膜内部には達しない。しかし膜内部におかれた電荷による電場は膜外部に達する。
3. 広い導体平面に一樣に電荷が面密度 σ で分布している。この電荷がつくる電場は表面に垂直で大きさが σ/ϵ_0 である。

- ③ 1. 真空中に電荷密度 ρ の電荷を分布させた場合、真空の誘電率を ϵ_0 として、静電ポテンシャル ϕ はラプラス方程式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (1)$$

の解として与えられる。真空中に単位長さあたりの電荷が λ の無限に長い一樣な直線状電荷を z -軸上に置いたとき、そのまわりにできる静電ポテンシャル ϕ は $\phi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log r + c$ で与えられる。ただし、ここで $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ と定義した。また、 c は定数である。このときの電場 E を求めよ。また、この与えられた電荷分布、および、静電ポテンシャル ϕ に対して、 $r \leq r_0$ で長さが l の z -軸に平行な円柱状領域で、式 (1) の両方をそれぞれ体積積分した量が等しくなることを、ガウスの定理を用いて示せ。

図のように、 $r = 0$ の直線を中心とする半径が d の無限に長い導体円柱をおき、単位長さあたり λ' の電荷を帯電させる。この導体円柱に平行に、単位長さあたりの電荷が λ の直線状電荷 (I) を $r = a$ のところにおく。この状態での導体円柱外部の静電ポテンシャルを求めたい。そのために、図中に示したように、導体円柱内部の $r = b$ の位置に単位長さあたりの電荷が λ'' の直線状電荷 (II) を導体円柱の代わりに鏡像としておくことを考える。



2. 導体円柱を鏡像 (II) に置き換えたとき、鏡像 (II) によって作られる電場が導体円柱外部の元の電場を与えるように鏡像を置く位置や鏡像の持つ電荷の大きさを決める。今の場合、導体円柱表面に現れる単位長さあたりの電荷 λ' と、鏡像 (II) の線電荷密度 λ'' は等しくなければならない。このことを示せ。

3. $r \rightarrow \infty$ の極限で静電ポテンシャルが一定値に近づくようにする為には、 $\lambda'' (= \lambda')$ をどのように選べばよいか、答えよ。

4. 前問の λ'' の値に対して、鏡像 (II) によって作られる電場が元の導体円柱外部の電場を正しく与えるように b の値を求めよ。
5. 導体円柱にはたらく静電気力は、導体円柱を鏡像 (II) に置き換えたときに鏡像 (II) にはたらく静電気力に等しいことを示せ。
6. 導体円柱が問 3 の λ' の値に帯電している状態で、直線状電荷 (I) を $r = a$ の位置から $r = a'$ の位置まで十分にゆっくりと移動させる。この移動で、直線状電荷 (I) の単位長さあたりになされた仕事を求めよ。