第 9 回問題の解答

(平成 20 年 6 月 27 日版)

$\boxed{1}$ (トムソン散乱 – 自由点電荷による電磁波の散乱)
加速運動する電荷 q の点電荷 $\boldsymbol{X}(t)$ の速度について $|\dot{\boldsymbol{X}}(t)| \ll c$ ($|\boldsymbol{\beta}(t)| = |\dot{\boldsymbol{X}}(t)/c| \ll 1$) が成り立つときに点電荷が単位加速時間あたりに放出するエネルギーは

$$\frac{dW}{dt'} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c}\int d\Omega\, |\boldsymbol{n}(t') \times (\boldsymbol{n}(t') \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))|^2 \tag{1}$$

であった。ここで $d\Omega$ は微小立体角要素をあらわし、$\boldsymbol{n}(t) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}(t))/|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}(t)|$ である。これを形式的に時間平均したものを $d\overline{W}/dt' = (1/2)dW/dt \equiv \overline{P}$ とする。

1. 単位立体角あたりに放射される単位加速時間あたりの平均エネルギー $d\overline{P}/d\Omega$ を求めよ。

2. 自由電磁波 (電荷密度、電流密度がない場合で、電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$、磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{B}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$ の平面波とする) が入射するとき、単位時間に単位面積を通過する電磁場の平均強度はポインティングベクトルの大きさを時間平均したもので与えられる。

$$\overline{S}_{\rm in} = \frac{1}{2c\mu_0}|\boldsymbol{E}_0|^2 = \frac{c\epsilon_0}{2}E_0^2 \tag{2}$$

   $d\overline{P}/d\Omega$ を $\overline{S}_{\rm in}$ で割ったものが電磁波が荷電粒子によって散乱されたときの微分散乱断面積 $d\sigma/d\Omega$ をあたえる。$d\sigma/d\Omega$ が

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\overline{P}}{d\Omega}\frac{1}{\overline{S}_{\rm in}} = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2}\frac{q^2}{c^4E_0^2}|\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\ddot{\boldsymbol{X}})|^2 \tag{3}$$

   となることを示せ。これが面積の次元をもつことを確認せよ。

3. 自由電荷がいるところに上記の平面電磁波が入射する場合の散乱を考える。(トムソン散乱) 電荷の質量を m, 電荷を q とする。運動方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = q[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X},t) + \dot{\boldsymbol{X}}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X},t)] \tag{4}$$

   である。$|\boldsymbol{B}_0| = |\boldsymbol{E}_0|/c$ であるので電荷の速さが光速にくらべて小さいときはローレンツ力を無視できる。式 (3) から、この場合の微分散乱断面積が

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 m}\right)^2 \sin^2\Theta \tag{5}$$

   となることをしめせ。Θ はベクトル $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X})/|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}|$ と $\boldsymbol{E}_0$ の成す角である。

4. 入射波が進む方向 $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{n}$ の成す角 θ が散乱角になる。散乱角全てについて微分散乱断面積を積分することで、全断面積をもとめたい。前問の結果で入射波が偏っていない場合、入射波の偏りについて平均すると $\sin^2\Theta = \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)$ となる。これを用いて散乱の全断面積を求めよ。

1.
$$\frac{d\overline{P}}{d\Omega} = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 c}|\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})|^2 = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 c^3}|\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\ddot{\boldsymbol{X}})|^2$$

2. 略

3. 自由電荷の加速度が

$$\ddot{\boldsymbol{X}}(t) = \frac{q\boldsymbol{E}_0}{m} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{X}(t)-\omega t)}$$

となる。また、

$$|\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\ddot{\boldsymbol{X}})|^2 = |\ddot{\boldsymbol{X}}|^2\left(1-\frac{(\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{X}})^2}{|\ddot{\boldsymbol{X}}|^2}\right) = |\ddot{\boldsymbol{X}}|^2\left(1-\cos^2\Theta\right)$$

である。さらに $|\ddot{\boldsymbol{X}}| = q|\boldsymbol{E}_0|/m$ より問題にあたえられた微分散乱断面積がもとまる。

4. 入射波の偏りについて平均した微分散乱断面積が

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 m}\right)^2 \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)$$

となるので、散乱の全断面積は以下のようになる。

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 m}\right)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta) = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 m}\right)^2$$

$\boxed{2}$ (レイリー散乱)

角振動数 ω_0 で束縛されている電荷に電磁場が入射して散乱される問題を考えよう。(レイリー散乱)

1. 運動方程式はローレンツ力を無視し、電場の影響を振動の中心 $\boldsymbol{X}_0$ で考慮すると

$$m\ddot{\boldsymbol{X}}(t) = -m\omega_0^2\boldsymbol{X}(t) + q\boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{X}_0-\omega t)} \tag{6}$$

となる。$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{a}e^{-i\omega t}$ とおいて特解を求めると、電荷の加速度が

$$\ddot{\boldsymbol{X}} = \frac{-q\omega^2\boldsymbol{E}_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{X}_0-\omega t)} \tag{7}$$

となることを示せ。

2. 解 (7) を散乱の微分断面積 (3) にもちいることで微分断面積が

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}\left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)\sin^2\Theta \tag{8}$$

となることを示せ。

3. 前問と同じ手続きで、散乱の全断面積をもとめよ。特に $\omega_0 \gg \omega$ の時に全断面積が入射波の波長の 4 乗に逆比例することをしめせ。

4. 大気による太陽光の散乱が本問で扱った散乱と同じものであることに注意して日中には空が青く見え、夕方は空が赤く見えることを説明せよ。

1. 粒子の位置が $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{a}e^{-i\omega t}$ になるとして運動方程式に代入すると振幅 $\boldsymbol{a}$ が

$$\boldsymbol{a} = \frac{q\boldsymbol{E}_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{X}_0}$$

となる。これを使えばよい。

2. 略

3. 前問と同じ手続きで

$$\sigma = \int d\Omega \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right) \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta) = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right) \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

である。波長は $\lambda = 2\pi c/\omega$ であるので、特に $\omega_0 \gg \omega$ の時は

$$\sigma \simeq \frac{8\pi}{3} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right) \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right) \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^4$$

となり、入射波の波長 λ の 4 乗に逆比例する。

4. 本問で扱った Rayleigh 散乱は散乱の全断面積が波長の 4 乗に逆比例する。これは、波長の短い波ほど散乱されやすく、エネルギーを失いやすいことを意味する。

   青い光の波長は短いので散乱されやすいため、日中は散乱された青い光が至るところにとどいて空が青く見える。一方、夕方は太陽光が大気中を長い距離走ることになり、短い波長の成分はすぐに散乱されてしまって遠くに届かなくなる。そのため散乱されずに残った長い波長の光 (赤い光) が主にとどくようになる。