

第8回問題の解答

(平成 20 年 6 月 20 日版)

① (加速度運動する点電荷がつくる電磁場、制動放射)

加速度運動する電荷 q の点電荷がある。その軌道を $\mathbf{X}(t)$ とおく。このとき、時刻 t における点 $\mathbf{x}$ での電磁場のエネルギーをしらべよう。

1. 放出源から十分に遠方 (波動帯) では、 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ の表現 (1) と (2) の $|\mathbf{x} - \mathbf{X}(t')|^{-1}$ の項が支配的になる。この項から $(t, \mathbf{x})$ でのポインティングベクトル $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ をもとめよ。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t'))(1 - |\boldsymbol{\beta}(t')|^2)}{\alpha^3(t')|\mathbf{x} - \mathbf{X}(t')|^2} + \frac{\mathbf{n}(t') \times \{(\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')\}}{c\alpha^3(t')|\mathbf{x} - \mathbf{X}(t')|} \right], \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{c} \mathbf{n}(t') \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\boldsymbol{\beta}(t') \times \mathbf{n}(t'))(1 - |\boldsymbol{\beta}(t')|^2)}{\alpha^3(t')|\mathbf{x} - \mathbf{X}(t')|^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\boldsymbol{\beta}(t') \times \mathbf{n}(t'))(\mathbf{n}(t') \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')) + \dot{\boldsymbol{\beta}}(t') \times \mathbf{n}(t')(1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))}{c\alpha^3(t')|\mathbf{x} - \mathbf{X}(t')|} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)|}, \quad \boldsymbol{\beta}(t) = \frac{\dot{\mathbf{X}}(t)}{c}, \quad \alpha(t) = \frac{\partial t}{\partial t'} = 1 - \frac{\mathbf{n}(t) \cdot \dot{\mathbf{X}}(t)}{c} \quad (3)$$

である。

2. 点電荷が $t' = T_1$ から T_2 の間に加速されるものとする。($T_2 > T_1$) この加速の効果は点 $\mathbf{x}$ では $\tau_1 < t < \tau_2$ で観測される。 τ_1, τ_2 はどう表されるか？
3. 点 $\mathbf{x}$ で $\tau_1 < t < \tau_2$ の間に流れるエネルギー量は以下の式で与えられる。

$$E = \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)| dt \quad (4)$$

これを加速する点電荷の時刻 t' に変数変換すると

$$E = \int_{T_1}^{T_2} |\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)| \frac{dt}{dt'} dt' \quad (5)$$

となる。点電荷が単位加速時間あたりに放射する全エネルギー dW/dt' はポインティングベクトルを半径 $|\mathbf{x} - \mathbf{X}(t')|$ の球面上で積分することで以下のようにあたえられる。

$$\frac{dW}{dt'} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \, \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t'))}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(t')|} \frac{dt}{dt'} |\mathbf{x} - \mathbf{X}(t')|^2 \quad (6)$$

これにポインティングベクトルの表式 $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = |\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)|^2 \mathbf{n}(t')/(\mu_0 c)$ と電場 (1) を用いると次のように変形できることを示せ。 $(\mathbf{n}(t) \equiv (\mathbf{x} - \mathbf{X}(t))/|\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)|)$ である。)

$$\frac{dW}{dt'} = \frac{1}{\mu_0 c^3} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int d\Omega \frac{|\mathbf{n}(t') \times \{(\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')\}|^2}{(1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))^5} \quad (7)$$

ここで $d\Omega$ は立体角の面積要素 $\sin\theta d\varphi d\theta$ である。

4. $|\dot{\mathbf{X}}(t)| \ll c$ ($|\beta(t)| \ll 1$) のとき、 dW/dt' は簡単な表式になる。式 (7) の被積分関数で、分子は $\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\beta})$ の項だけを考慮し、分母は 1 としてよい。ここで $(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t'))$ と $\ddot{\mathbf{X}}(t')$ の間の角度を θ とおき、積分を実行すると

$$\frac{dW}{dt'} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} |\ddot{\mathbf{X}}(t')|^2 \quad (8)$$

となることをしめせ。(Larmor の公式)

5. 質量 m の点電荷が x 方向に角振動数 ω_0 で調和振動しているとすると、電荷の位置は $X(t) = ae^{i\omega_0 t}$ で表される。放射エネルギー (8) に $\ddot{X}(t)$ を入れて振動の周期 $T = 2\pi/\omega_0$ で平均をとることにより単位時間の平均放射エネルギーをもとめよ。

1.

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\mu_0 c} |\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)|^2 \mathbf{n} = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\mathbf{n}(t')}{c^2 \alpha^6(t') R^2(t')} \left\{ \mathbf{n}(t') \times [(\mathbf{n}(t') - \beta(t')) \times \dot{\beta}(t')] \right\}^2$$

2.

$$\tau_2 - \tau_1 = \left(T_2 + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(T_2)|}{c} \right) - \left(T_1 + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(T_1)|}{c} \right)$$

3. 略

4.

$$\frac{dW}{dt'} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \int d\Omega \left| \mathbf{n}(t') \times (\mathbf{n}(t') \times \dot{\beta}(t')) \right|^2 = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \int d\Omega \sin^2\theta |\dot{\beta}(t')|^2 = \frac{q^2}{6\pi^2\epsilon_0 c^3} |\ddot{\mathbf{X}}(t')|^2$$

5. $\ddot{X}(t)$ の実部をとり、Larmor の公式に代入して時間平均をとると単位時間の平均放射エネルギーは

$$P = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} a^2 \omega_0^4$$

となる。

② 非相対論的な粒子（電荷 e 、質量 m ）が斥力ポテンシャル $V(r)$ の中心力場に衝突パラメーター 0 で衝突する。

- 放射される全エネルギーの積分形を求めよ。ただし、十分離れたときの粒子の運動エネルギーを E とし、 $V(\infty) = 0$ 、 $V(r_{\min}) = E$ とする。
- $V(r)$ がクーロン・ポテンシャル $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}$ のときには、放射される全エネルギーは $\frac{8}{45} \frac{mv_0^5}{Zc^3}$ となることを示せ。 $(E = \frac{m}{2} v_0^2)$

【クーロン散乱】

1. 以下の 3 式を用いる。エネルギー保存の式

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(r) = \text{const.} = \frac{1}{2}mv_0^2 = V(r_{\min})$$

粒子の運動方程式

$$m\ddot{x} = -\frac{dV(x)}{dx}$$

単位時間あたりに加速粒子から放出されるエネルギーの式 (Larmor の式)

$$\frac{dW}{dt'} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} |\ddot{x}(t')|^2$$

全放射エネルギー ΔW は次のように求める。時刻 $t = t_0$ に粒子が十分遠方の点 $x = -\infty$ を出発して $t = t_1$ に点 $x = -r_{\min}$ で斥力によって転回して、 $t = t_2$ に再び出発点 $x = -\infty$ にもどるとすれば、

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dW}{dt'} dt' + \int_{t_1}^{t_2} \frac{dW}{dt'} dt' = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m^2} \int_{t_0}^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dV(x(t'))}{dx} \right)^2 dt'$$

である。変数変換をして、 t の積分を x の積分に書き直すと

$$\Delta W = \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3 m^2} \int_{-\infty}^{-r_{\min}} \left(\frac{dV(x)}{dx} \right)^2 \frac{dt'}{dx} dx$$

である。粒子の速度 dx/dt' はエネルギー保存の式から求まるので、求めるエネルギーの積分形は

$$\Delta W = \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3 m^2} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_{\min}}^{\infty} \left(\frac{dV(x)}{dx} \right)^2 \frac{dx}{\sqrt{V(r_{\min}) - V(x)}}$$

である。

2. $V(r)$ がクーロン・ポテンシャル $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}$ のときには、 ΔW の表式に現れている積分が実行できて、

$$\int_{r_{\min}}^{\infty} \left(\frac{dV(x)}{dx} \right)^2 \frac{dx}{\sqrt{V(r_{\min}) - V(x)}} = \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^{3/2} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{1}{x^4} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{r_{\min}} - \frac{1}{x}}} = \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^{3/2} \frac{16}{15} r_{\min}^{-5/2}$$

となる。 $r_{\min} = Ze^2/(2\pi\epsilon_0 mv_0^2)$ をいれると、問題に与えられた表式を得る。