第 7 回問題の解答

(平成 20 年 6 月 13 日版)

$\boxed{1}$ (点電荷による電磁波の放射 リエナール–ビーヒェルトポテンシャル)
電荷 q をもつ点電荷の軌道が $\boldsymbol{X}(t)$ で与えられるものとするとき、この運動によって生じる電磁場を考えよう。このとき電荷分布 $\rho(\boldsymbol{x},t)$ と電流密度 $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x},t)$ は

$$\rho(\boldsymbol{x},t) = q\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t)), \quad \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x},t) = q\dot{\boldsymbol{X}}(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t)), \tag{1}$$

で与えられる。これを Maxwell 方程式の一般解 (遅延ポテンシャルをもちいる)

$$\phi(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d\boldsymbol{x}'\int dt'\ \frac{\rho(\boldsymbol{x}',t')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\ \delta\left(t-t'-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}{c}\right), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d\boldsymbol{x}'\int dt'\ \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}',t')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\ \delta\left(t-t'-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}{c}\right) \tag{3}$$

に代入し、整理をすることで $\phi, \boldsymbol{A}$ の表現を得てみよう。

1. (準備) δ 関数を含む次の公式を示せ。

$$\delta(F(\tau)) = \delta(\tau-t_0)\frac{1}{\left|\left.\frac{dF(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=t_0}\right|} \tag{4}$$

   ここで t_0 は $F(\tau)=0$ の解 (一意とする) である。
   (ヒント: $\int\delta(F(\tau))g(\tau)d\tau$ を考えて、変数変換をせよ。)

2. ポテンシャルの式 (2)、(3) に電荷密度、電流密度 (1) を代入して空間積分を行い、公式 (4) を用いるとポテンシャルが以下のようになることを示せ。

$$\phi(\boldsymbol{x},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t_0')|-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{X}}(t_0')\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t_0'))}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{\dot{\boldsymbol{X}}(t_0')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t_0')|-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{X}}(t_0')\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t_0'))}, \tag{6}$$

   ただし、t_0' は $t = t_0' + \dfrac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t_0')|}{c}$ で与えられる。(ここで電荷の速さは光速よりも遅いものとして、$\dfrac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t'))\cdot\dot{\boldsymbol{X}}(t')}{c|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t')|} < 1$ であることに注意せよ。)
   表現 (5)、(6) は点電荷の運動によって放射される電磁場を与えるもので Liénard–Wiechert(リエナール–ビーヒェルト) ポテンシャルという。

1. $g(\tau)$ をかけて積分をする。積分に寄与するのは $\delta(F(\tau))$ のために、$F(\tau)=0$ をみたす $\tau=t_0$ 近傍からであるから

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(F(\tau))g(\tau)d\tau = \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon}\delta(F(\tau))g(\tau)d\tau$$

となる。ここで、$F(\tau)=u$ と変数変換をおこなうと $(\tau=F^{-1}(u))$

$$\begin{aligned}\int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon}\delta(F(\tau))g(\tau)d\tau &= \int_{0-\epsilon\left(\frac{dF}{d\tau}\right)_{\tau=t_0}}^{0+\epsilon\left(\frac{dF}{d\tau}\right)_{\tau=t_0}}\delta(u)g(F^{-1}(u))\frac{dF^{-1}(u)}{du}du \\ &= g(F^{-1}(0))\left.\frac{dF^{-1}(u)}{du}\right|_{u=0}\operatorname{sign}\left(\left.\frac{dF(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=t_0}\right) \\ &= g(t_0)\frac{1}{\left.\frac{dF(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=t_0}}\operatorname{sign}\left(\left.\frac{dF(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=t_0}\right)\end{aligned}$$

となって示せる。

2. スカラーポテンシャルについて、電荷密度 (1) を代入して空間積分をおこなうと

$$\phi(\boldsymbol{x},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t')|}\delta\left(t-t'-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t')|}{c}\right)$$

となる。$F(t')=t-t'-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t')|}{c}$ とおいて式 (4) をつかうと

$$\phi(\boldsymbol{x},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t_0')|}\frac{1}{\left|-1+\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}'(t_0'))\cdot\dot{X}(t_0')}{c|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t_0')|}\right|}$$

となる。$\dfrac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t'))\cdot\dot{\boldsymbol{X}}(t')}{c|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t')|}=\dfrac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t')|}\cdot\dfrac{\dot{\boldsymbol{X}}(t')}{c}<1$ より一番右の絶対値をはずすと解答を得る。ベクトルポテンシャルも同様。

$\boxed{2}$ (等速運動する点電荷がつくる電磁場)
等速運動する電荷 q の点電荷がある。その速度を $\dot{\boldsymbol{X}}(t)=(v,0,0)$ として軌道を $\boldsymbol{X}(t)=(vt,0,0)$ とする。時刻 t における点 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$ での電場、磁束密度を求めよう。

1. $t=t'+|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t')|/c$ をみたす t' を求めよ。
2. リエナール–ビーヒェルトポテンシャルを用いてポテンシャル $\phi,\boldsymbol{A}$ を求めよ。
3. ポテンシャルから $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ を求めよ。$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{E}$ の関係を述べよ。
4. $|\boldsymbol{E}|=\mathrm{const.}$ の面はどのような形状になるか？

1. $t=t'+\frac{1}{c}\sqrt{(x-vt')^2+y^2+z^2}$ を変形して得られる 2 次方程式を解けばよい。

$$\begin{aligned}t' &= \frac{(c^2t-xv)\pm\sqrt{c^2(vt-x)^2+(c^2-v^2)(y^2+z^2)}}{c^2-v^2} \\ &= \frac{\left(t-\frac{x}{c}\frac{v}{c}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{v}{c}t-\frac{x}{c}\right)^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{y^2+z^2}{c^2}}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\end{aligned}$$

となるが、$t>t'$ より複号は $-$ をとる ($y=z=0$ などを代入してどちらが適切か調べればよい)。

2. リエナール–ビーヒェルトポテンシャルの分母が $c(t-t') + \frac{v}{c}(x - vt')$ になるので、これに解 t' をいれればよい。

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(vt-x)^2 + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}},\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) &= \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{(v,\, 0,\, 0)}{\sqrt{(vt-x)^2 + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}}\end{aligned}$$

3. ポテンシャルを直接微分する。$R = \sqrt{(vt-x)^2 + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) &= -\nabla\phi - \partial_t \boldsymbol{A} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{R^2}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial R}{\partial x}\\ \frac{\partial R}{\partial y}\\ \frac{\partial R}{\partial z}\end{pmatrix} - \frac{\mu_0 q}{4\pi}\left(-\frac{1}{R^2}\right)\frac{\partial R}{\partial t}\begin{pmatrix}v\\0\\0\end{pmatrix}\\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left[(vt-x)^2 + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)\right]^{3/2}}\begin{pmatrix}x-vt\\ y\\ z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。磁束密度も同様で、以下のとおり。

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = \begin{pmatrix}\partial_1\\ \partial_2\\ \partial_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}A_1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \partial_3 A_1\\ -\partial_2 A_1\end{pmatrix} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left[(vt-x)^2 + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)\right]^{3/2}}\begin{pmatrix}0\\ -z\\ y\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{E}$ の関係については、$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{A}$ が平行であることに注目して $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{v}\times\nabla\phi$ を得る。これから、$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}/c^2$ となることがわかる。

4. 電場の表式から、以下のように極座標をとる (x 軸からの方位角を θ として、$\rho^2 = (x-vt)^2 + y^2 + z^2$ とする)。

$$\begin{aligned}x - vt &= \rho\cos\theta,\\ y &= \rho\sin\theta\cos\varphi,\\ z &= \rho\sin\theta\sin\varphi.\end{aligned}$$

このとき、電場の分母に現れる表式が

$$(x-vt)^2 + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2) = \rho^2 - \frac{v^2}{c^2}(y^2+z^2) = \rho^2\left\{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right\}$$

と表せる。つまり、電場は $\rho = (x-vt,\, y,\, z)$ とおくとき

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}\left\{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right\}^{-3/2}$$

である。以上から $|\boldsymbol{E}| = \mathrm{const.} = E_0$ となる点がみたす方程式は、式変形をすると、

$$\rho = \left\{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 E_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right\}^{1/2}\left\{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right\}^{-3/4} = \mathrm{const.}\times\left\{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right\}^{-3/4}$$

となる。$v \ll c$ のときは、動径の長さ ρ は一定になる。つまり電場の等値面は $(vt, 0, 0)$ を中心とする球になる。一方で、$v \lesssim c$ のとき ($v/c \sim 0.1$ など) は $\sin^2\theta$ の効果が無視できなくなる。$\rho(\theta)$ は $\theta = 0$ で最大で $\theta = \pi/2$ で $\rho(\theta)$ が最小となるのでこの場合の電場の等値面は点 $(vt, 0, 0)$ を中心として x 軸の方向に扁平な回転楕円体状の形状をとる。