第 7 回問題

- ① 電荷 q をもつ点電荷の軌道が $\mathbf{X}(t)$ で与えられるものとするとき、この運動によって生じる電磁場を考えよう。このとき電荷分布 $\rho(\mathbf{x}, t)$ と電流密度 $\mathbf{i}(\mathbf{x}, t)$ は

$$\rho(\mathbf{x}, t) = q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)), \quad \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) = q\dot{\mathbf{X}}(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)), \quad (1)$$

で与えられる。これを Maxwell 方程式の一般解 (遅延ポテンシャルをもちいる)

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{x}' \int dt' \frac{\rho(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right), \quad (2)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{x}' \int dt' \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right) \quad (3)$$

に代入し、整理をすることで $\phi, \mathbf{A}$ の表現を得てみよう。

1. (準備) δ 関数を含む次の公式を示せ。

$$\delta(F(\tau)) = \delta(\tau - t_0) \frac{1}{\left| \frac{dF(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=t_0}} \quad (4)$$

ここで t_0 は $F(\tau) = 0$ の解 (一意とする) である。

(ヒント: $\int \delta(F(\tau))g(\tau)d\tau$ を考えて、変数変換をせよ。)

2. ポテンシャルの式 (2)、(3) に電荷密度、電流密度 (1) を代入して空間積分を行い、公式 (4) を用いるとポテンシャルが以下ようになることを示せ。

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(t'_0)| - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{X}}(t'_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{X}(t'_0))}, \quad (5)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{X}}(t'_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(t'_0)| - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{X}}(t'_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{X}(t'_0))}, \quad (6)$$

ただし、 t'_0 は $t = t'_0 + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(t'_0)|}{c}$ で与えられる。(ここで電荷の速さは光速よりも遅いものとして、 $\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t')) \cdot \dot{\mathbf{X}}(t')}{c|\mathbf{x} - \mathbf{X}(t')|} < 1$ であることに注意せよ。)

表現 (5)、(6) は点電荷の運動によって放射される電磁場を与えるもので Liénard–Wiechert (リエナール–ビーヒェルト) ポテンシャルという。

- ② 等速運動する電荷 q の点電荷がある。その速度を $\dot{\mathbf{X}}(t) = (v, 0, 0)$ として軌道を $\mathbf{X}(t) = (vt, 0, 0)$ とする。時刻 t における点 $\mathbf{x} = (x, y, z)$ での電場、磁束密度を求めよう。

1. $t = t' + |\mathbf{x} - \mathbf{X}(t')|/c$ をみたく t' を求めよ。
2. リエナール–ビーヒェルトポテンシャルを用いてポテンシャル $\phi, \mathbf{A}$ を求めよ。
3. ポテンシャルから $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ を求めよ。 $\mathbf{B}$ と $\mathbf{E}$ の関係を述べよ。
4. $|\mathbf{E}| = \text{const.}$ の面はどのような形状になるか？