

第6回問題の解答

(平成 20 年 6 月 6 日版)

① 長さ d の細い直線状アンテナ ($-d/2 \leq x \leq d/2$) に振動電流 $I(x, t) = \frac{x}{|x|} \frac{I_0}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{d}x\right) \exp(i\omega t)$ が流れる。

1. 単位立体角に放射されるエネルギーを求めよ。
2. 全放射エネルギーを求めよ

放射帯 ($|x| \rightarrow \infty$ で支配的な項だけを計算する) での振舞いは双極子放射によってきまる。このアンテナがもつ双極子モーメントを最初に求める。電荷保存則から、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial x} = \pm \frac{I_0}{2} \left(\frac{2\pi}{d}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right) e^{i\omega t}$$

(複号は $+$ が $x < 0$ で $-$ が $x \geq 0$) なので、

$$\rho(x, t) = \pm \frac{I_0}{2i\omega} \left(\frac{2\pi}{d}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right) e^{i\omega t}$$

である。(実際は右辺の実部をとる) ここで電磁場の放射を考慮しているので電荷密度の定数項は無視する。双極子モーメント $p(t) = \int x' \rho(x', t) dx'$ は x 成分のみで、それを $p(t)$ とおくと

$$p(t) = \int_{-d/2}^{d/2} x' \rho(x', t) dx' = \frac{I_0 d}{\pi i \omega} e^{i\omega t}$$

である。この実部をとったものが双極子モーメントの実体で、 $p(t) = \frac{I_0 d}{\pi \omega} \sin \omega t$ である。

1. 単位立体角に放射されるエネルギーは、双極子放射のポインティングベクトルを計算すればよい。

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times \ddot{\mathbf{p}}(t - \frac{r}{c}))}{r^3} \times \left[-\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{x} \times \ddot{\mathbf{p}}(t - \frac{r}{c})}{cr^2} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \left| \ddot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right|^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \mathbf{n} \\ &= \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \left(\frac{I_0 d \omega}{\pi} \right)^2 \sin^2 \left\{ \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right\} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \mathbf{n}. \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}| = \mathbf{x}/r$ であり、 θ はベクトル $\mathbf{n}$ と双極子モーメントの方向 (x 軸) との間の角度である。これの時間平均をとると $((\omega/2\pi) \int_0^{2\pi/\omega} dt)$ 、半径 r の球面上で単位立体角に放射されるエネルギーが

$$\overline{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n} r^2 = \frac{\mu_0}{2(4\pi)^2 c} \left(\frac{I_0 d \omega}{\pi} \right)^2 \sin^2 \theta$$

となる。

2. 全放射エネルギー P は前問の結果を、半径 r の球面上で全立体角の積分をすればよい。

$$P = \int \overline{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\mu_0}{12\pi c} \left(\frac{I_0 d \omega}{\pi} \right)^2$$

② (四重極放射、磁気双極子放射)

(注) この問題は長いので、小問 1-5、6-9 に分けて発表してください。

(多重極放射) の問題の式

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \phi_l(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{(2l+1)!!} (-r)^l \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^l \frac{1}{r} \left\langle \rho^{(l)} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right\rangle, \quad (1)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{A}_l(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(2l-1)}{(2l-1)!!} (-r)^{l-1} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{l-1} \frac{1}{r} \left\langle \mathbf{i}^{(l-1)} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right\rangle, \quad (2)$$

式 (1)、(2) で $l = 2$ の場合を考察しよう。

1. 式 (1) で $l = 2$ の項を抜き出し、 d/dr を実行した結果 $1/r$ の次数の最も低いものが

$$\phi_2(\mathbf{x}, t) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{3c^2} \frac{1}{r} \left\langle \ddot{\rho}^{(2)} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right\rangle \quad (3)$$

となることを示せ。ここで

$$\ddot{\rho}^{(2)}(t) = \int r'^2 P_2(\cos \theta') \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' \quad (4)$$

である。

2. 電気四重極子モーメント $Q(\mathbf{x}, t)$ は次のように定義される。

$$Q(\mathbf{x}, t) = \int \left[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}')^2 - \frac{1}{3} |\mathbf{x}'|^2 \right] \rho(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' \quad (5)$$

ここで $\mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ である。電気四重極子モーメントをつかうと (3) が

$$\phi_2(\mathbf{x}, t) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2c^2} \frac{\ddot{Q} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \quad (6)$$

となることを示せ。

3. 式 (2) からも $l = 2$ の項について、 d/dr を実行した結果 $1/r$ の次数の最も低いものが

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{x}, t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{cr} \frac{d}{dt} \left\langle \mathbf{i}^{(1)} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right\rangle \quad (7)$$

となることをしめせ。

4. 以下の準備として、電荷保存則 $\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{i} = 0$ を用いて、恒等式

$$\int (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{i}(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' = \frac{1}{2} \left(\int \mathbf{x}' \times \mathbf{i}(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' \right) \times \mathbf{n} + \frac{1}{2} \int \mathbf{x}' (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{n}) \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' \quad (8)$$

がなりたつことを示せ。

5. 式 (8) から、磁気双極子モーメント $\mathbf{m}(t) = \frac{1}{2} \int \mathbf{x}' \times \mathbf{i}(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'$ と電気四重極子モーメント $Q = \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}$

で定義されるベクトル $Q(t)$

$$Q(t) = \int \left[\mathbf{x}'(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') - \frac{1}{3} \mathbf{n} |\mathbf{x}'|^2 \right] \rho(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' \quad (9)$$

を使うと式 (7) が

$$A_2(\mathbf{x}, t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{cr} \left[\dot{\mathbf{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{n} + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{Q}} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{6} \mathbf{n} \int |\mathbf{x}'|^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c} \right) d\mathbf{x}' \right] \quad (10)$$

となることを示せ。特に式 (10) の右辺第一項は磁気双極子からの放射を表している。

6. 磁気双極子からの寄与で、遠方で支配的になる項 ($1/r$ の巾がもっとも小さい項) が電場 $E^{(m)}$ 、磁束密度 $B^{(m)}$ が

$$\mathbf{E}^{(m)} = -\frac{\mu_0}{4\pi cr} \ddot{\mathbf{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{B}^{(m)} = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r} \left(\ddot{\mathbf{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{n} \right) \times \mathbf{n} \quad (11)$$

となることを示せ。この磁気双極子放射エネルギーの角分布の平均 $\bar{S} \times \mathbf{n} = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ を求めよ。

7. ポテンシャル (6), (10) で電気四重極子からの放射を考えよう。式 (6), (10) で $Q, \mathbf{Q}$ がある項から ($1/r$) の次数の最も低い電場 E_Q と磁束密度 B_Q を求めると

$$\mathbf{E}_Q = \frac{\mu_0}{8\pi c} \frac{\mathbf{x} \times \left(\mathbf{x} \times \ddot{\mathbf{Q}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)}{r^3}, \quad \mathbf{B}_Q = \frac{\mu_0}{8\pi c^2} \frac{\ddot{\mathbf{Q}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{x}}{r^2} \quad (12)$$

となることをしめせ。

8. 以上の結果から電気四重極子放射のエネルギーの角分布の平均が次のようになることを示せ。

$$\bar{S} \cdot \mathbf{n} = \frac{c}{2\mu_0} |B_Q|^2 = \frac{c}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0}{8\pi c^2} \right)^2 \frac{1}{r^2} \left| \ddot{\mathbf{Q}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{n} \right|^2 \quad (13)$$

9. 電荷分布 $\rho(\mathbf{x}, t)$ が z 軸の周りに回転対称であるとき、 Q の各成分について $Q_i = \sum Q_{ij} n_j$ が $Q = (-n_1 Q_0/2, -n_2 Q_0/2, n_3 Q_0)$ とおける。 $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ であることも用いて変型すると、(13) が $\cos^2 \theta \sin^2 \theta$ に比例することを示せ。この角度依存性は双極子放射とは異なることがわかる。

1. 略

2. $P_2(\cos \theta) = (3 \cos^2 \theta - 1)/2$ であり、 $\cos \theta' = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')/(|\mathbf{x}||\mathbf{x}'|)$ を使って変形する。

3. 略

4. 右辺の j 成分が左辺の形になることを示す。

$$\frac{1}{2} \epsilon_{jlm} (\mathbf{x}' \times \mathbf{i})_l n_m + \frac{1}{2} x'_j x'_k n_k \partial_t \rho = \frac{1}{2} \epsilon_{jlm} \epsilon_{lpq} x'_p i_q n_m + \frac{1}{2} x'_j x'_k n_k (-\partial'_l i_l) = -\frac{1}{2} \partial'_l (x'_j x'_k i_l) n_k + i_j (n_k x'_k)$$

となるが、最右辺第一項は積分をすると消える。

5. 略

6. 磁気双極子からの寄与で、遠方で支配的になる項 ($1/r$ の巾がもっとも小さい項) は電場についてはストレートに

$$\mathbf{E}^{(m)} = -\partial_t \left[\frac{\mu_0}{4\pi cr} \dot{\mathbf{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{n} \right] = -\frac{\mu_0}{4\pi cr} \ddot{\mathbf{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{n}$$

となる。磁束密度については、 $1/r$ の巾が最も小さくなるのは $\nabla \times \mathbf{A}$ の微分がモーメント $\mathbf{m}$ の引数にかかることで、計算すると問題にあたえられているものになる。

この磁気双極子放射エネルギーの角分布の平均については、 $\mathbf{B}^{(m)} = -(1/c)\mathbf{E}^{(m)} \times \mathbf{n}$, $\mathbf{E}^{(m)} \perp \mathbf{n}$ に注意して

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{2\mu_0 c} (\mathbf{E}^{(m)} \times (\mathbf{E}^{(m)} \times \mathbf{n})) = \frac{1}{2\mu_0 c} |\mathbf{E}^{(m)}|^2 \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{2\mu_0 c} \left(\frac{\mu_0}{4\pi c r} \right)^2 |\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}|^2 \mathbf{n} = \frac{\mu_0}{2(4\pi)^2 c^3} \frac{1}{r^2} \left| \ddot{\mathbf{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2 \sin^2 \theta \mathbf{n}\end{aligned}$$

となる。ここで θ は $\ddot{\mathbf{m}}$ と $\mathbf{n}$ の間の角度である。

7. 電場 $\mathbf{E}_Q$ と磁束密度 $\mathbf{B}_Q$ は

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_Q &= -\nabla\phi_2 - \partial_t \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{8\pi c} \frac{\mathbf{x} \times \left(\mathbf{x} \times \ddot{\mathbf{Q}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)}{r^3}, \\ \mathbf{B}_Q &= \nabla \times \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{8\pi c^2} \frac{\ddot{\mathbf{Q}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{x}}{r^2} + \frac{\mu_0}{8\pi c^2} \frac{\ddot{\mathbf{Q}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{x}}{r^3}\end{aligned}$$

となる。 $\mathbf{B}_Q$ の右辺第二項は第一項に比べて小さいので無視する。

8. $\mathbf{E}_Q = -c\mathbf{n} \times \mathbf{B}_Q$ に注意する。このとき、電気四重極子放射のエネルギーの流れが

$$\bar{S} = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{E}_Q \times \mathbf{B}_Q = -\frac{c}{2\mu_0} (\mathbf{n} \times \mathbf{B}_Q) \times \mathbf{B}_Q = \frac{c}{2\mu_0} |\mathbf{B}_Q|^2 \mathbf{n}$$

となるので (13) を得る。

9. $\mathbf{Q} = \ddot{\mathbf{Q}}_0(-n_1/2, -n_2/2, n_3)$ と $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ との外積を単純に計算すればよい。

$$|\mathbf{Q} \times \mathbf{n}|^2 = \frac{9}{4} |\ddot{\mathbf{Q}}_0|^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta$$

となる。