# 第 6 回問題

$\boxed{1}$ 長さ $d$ の細い直線状アンテナ $(-d/2 \leq x \leq d/2)$ に振動電流 $I(x,t) = \dfrac{x}{|x|}\dfrac{I_0}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{d}x\right)\exp(i\omega t)$ が流れる。

1. 単位立体角に放射されるエネルギーを求めよ。
2. 全放射エネルギーを求めよ

$\boxed{2}$ (注) この問題は長いので、小問 1–5、6–9 に分けて発表してください。
(多重極放射) の問題の式

$$\phi(\boldsymbol{x},t) = \sum_{l=0}^{\infty}\phi_l(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(2l+1)}{(2l+1)!!}(-r)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\frac{1}{r}\left\langle\rho^{(l)}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\rangle, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{l=1}^{\infty}\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(2l-1)}{(2l-1)!!}(-r)^{l-1}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{l-1}\frac{1}{r}\left\langle\boldsymbol{i}^{(l-1)}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\rangle, \tag{2}$$

式 (1)、(2) で $l=2$ の場合を考察しよう。

1. 式 (1) で $l=2$ の項を抜き出し、$d/dr$ を実行した結果 $1/r$ の次数の最も低いものが

$$\phi_2(\boldsymbol{x},t) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{3c^2}\frac{1}{r}\left\langle\ddot{\rho}^{(2)}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\rangle \tag{3}$$

   となることを示せ。ここで

$$\ddot{\rho}^{(2)}(t) = \int r'^2 P_2(\cos\theta')\,\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}(\boldsymbol{x}',t)\,d\boldsymbol{x}' \tag{4}$$

   である。

2. 電気四重極子モーメント $Q(\boldsymbol{x},t)$ は次のように定義される。

$$Q(\boldsymbol{x},t) = \int\left[(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}')^2 - \frac{1}{3}|\boldsymbol{x}'|^2\right]\rho(\boldsymbol{x}',t)d\boldsymbol{x}' \tag{5}$$

   ここで $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|$ である。電気四重極子モーメントをつかうと (3) が

$$\phi_2(\boldsymbol{x},t) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2c^2}\frac{\ddot{Q}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} \tag{6}$$

   となることを示せ。

3. 式 (2) にからも $l=2$ の項について、$d/dr$ を実行した結果 $1/r$ の次数の最も低いものが

$$\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{x},t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{cr}\frac{d}{dt}\left\langle\boldsymbol{i}^{(1)}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\rangle \tag{7}$$

   となることをしめせ。

4. 以下の準備として、電荷保存則 $\partial_t \rho + \nabla \cdot \boldsymbol{i} = 0$ を用いて、恒等式

$$\int (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}')\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}',\, t)\, d\boldsymbol{x}' = \frac{1}{2}\left(\int \boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}', t)\, d\boldsymbol{x}'\right) \times \boldsymbol{n} + \frac{1}{2}\int \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{n})\frac{\partial \rho}{\partial t}(\boldsymbol{x}', t) d\boldsymbol{x}' \tag{8}$$

がなりたつことを示せ。

5. 式 (8) から、磁気双極子モーメント $\boldsymbol{m}(t) = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}', t)\, d\boldsymbol{x}'$ と電気四重極子モーメント $Q = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{Q}$ で定義されるベクトル $\boldsymbol{Q}(t)$

$$\boldsymbol{Q}(t) = \int \left[\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}') - \frac{1}{3}\boldsymbol{n}|\boldsymbol{x}'|^2\right] \rho(\boldsymbol{x}', t) d\boldsymbol{x}' \tag{9}$$

を使うと式 (7) が

$$\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{x}, t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{cr}\left[\dot{\boldsymbol{m}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \boldsymbol{n} + \frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{Q}}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{6}\boldsymbol{n}\int |\boldsymbol{x}'|^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}\left(\boldsymbol{x}', t - \frac{r}{c}\right) d\boldsymbol{x}'\right] \tag{10}$$

となることを示せ。特に式 (10) の右辺第一項は磁気双極子からの放射を表している。

6. 磁気双極子からの寄与で、遠方で支配的になる項 ($1/r$ の巾がもっとも小さい項) が電場 $\boldsymbol{E}^{(m)}$、磁束密度 $\boldsymbol{B}^{(m)}$ が

$$\boldsymbol{E}^{(m)} = -\frac{\mu_0}{4\pi cr}\ddot{\boldsymbol{m}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{B}^{(m)} = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r}\left(\ddot{\boldsymbol{m}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \boldsymbol{n}\right) \times \boldsymbol{n} \tag{11}$$

となることを示せ。この磁気双極子放射エネルギーの角分布の平均 $\overline{S} \times \boldsymbol{n} = \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ を求めよ。

7. ポテンシャル (6), (10) で電気四重極子からの放射を考えよう。式 (6), (10) で $Q, \boldsymbol{Q}$ がある項から $(1/r)$ の次数の最も低い電場 $\boldsymbol{E}_Q$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}_Q$ を求めると

$$\boldsymbol{E}_Q = \frac{\mu_0}{8\pi c}\frac{\boldsymbol{x} \times \left(\boldsymbol{x} \times \dddot{\boldsymbol{Q}}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)}{r^3}, \quad \boldsymbol{B}_Q = \frac{\mu_0}{8\pi c^2}\frac{\dddot{\boldsymbol{Q}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \boldsymbol{x}}{r^2} \tag{12}$$

となることをしめせ。

8. 以上の結果から電気四重極子放射のエネルギーの角分布の平均が次のようになることを示せ。

$$\overline{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{c}{2\mu_0}|\boldsymbol{B}_Q|^2 = \frac{c}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0}{8\pi c^2}\right)^2 \frac{1}{r^2}\left|\dddot{\boldsymbol{Q}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \boldsymbol{n}\right|^2 \tag{13}$$

9. 電荷分布 $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ が $z$ 軸の周りに回転対称であるとき、$\boldsymbol{Q}$ の各成分について $Q_i = \sum Q_{ij} n_j$ が $\boldsymbol{Q} = (-n_1 Q_0/2,\, -n_2 Q_0/2, n_3 Q_0)$ とおける。$\boldsymbol{n} = (n_1,\, n_2,\, n_3) = (\sin\theta\cos\varphi,\, \sin\theta\sin\varphi,\, \cos\theta)$ であることも用いて変型すると、(13) が $\cos^2\theta\sin^2\theta$ に比例することを示せ。この角度依存性は双極子放射とは異なることがわかる。