第 5 回問題の解答

(平成 20 年 5 月 30 日版)

$\boxed{1}$ (多重極放射)
遅延ポテンシャル

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int d\boldsymbol{x}'\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}',t')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|},\quad \phi(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d\boldsymbol{x}'\frac{\rho(\boldsymbol{x}',t')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|},\quad \left(t'=t-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}{c}\right) \tag{1}$$

の $|\boldsymbol{x}'|/|\boldsymbol{x}|\ll 1$ での漸近的な振舞いをしらべてみよう。これは繁雑であるが以下のような組織的な手続きを経てなされる (多重極展開と呼ばれる)。

1. まず最初に遅延ポテンシャルの時間について δ 関数を用いて

$$\phi(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d\boldsymbol{x}'\int dt'\delta\left(t-t'-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}{c}\right)\frac{\rho(\boldsymbol{x}',t')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{2}$$

とかく。次に

$$\delta\left(t-t'-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}{c}\right)=\frac{1}{2\pi}\int d\omega\exp\left[-i\omega\left(t-t'-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}{c}\right)\right] \tag{3}$$

を用いてポテンシャルを書き直し、$|\boldsymbol{x}'|<|\boldsymbol{x}|$ での関数展開

$$\frac{e^{ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}=ik\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)j_l(k|\boldsymbol{x}'|)h_l^{(1)}(k|\boldsymbol{x}|)P_l(\cos\theta') \tag{4}$$

を使う。ここで $P_l(s)$ は Legendre 多項式、$j_l(s)$ は球面 Bessel 関数、$h_l^{(1)}(s)$ は第 1 種球面 Hankel 関数であり、θ' は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ の間の角度である。以下では $|\boldsymbol{x}|=r$, $|\boldsymbol{x}'|=r'$ と書くことにする。さて (2)–(4) の結果、スカラーポテンシャルが

$$\phi(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\int dt'\frac{2l+1}{2\pi}\int d\omega e^{-i\omega(t-t')}\left(\frac{i\omega}{c}\right)h_l^{(1)}\left(\frac{\omega r}{c}\right)\int d\boldsymbol{x}'j_l\left(\frac{\omega r'}{c}\right)P_l(\cos\theta')\rho(\boldsymbol{x}',t') \tag{5}$$

と表されることを示せ。

2. 電荷が空間スケール a の中にのみ分布しているとして、電荷分布の振動の周期 $T=2\pi/\omega$ について $cT\gg a$ が成り立つとする。(これは、放射される電磁波の波長が電流分布、電荷分布の存在する領域よりも十分大きい極限を考慮することを意味する。) このときの特殊関数の振舞いは、それぞれ

$$j_l\left(\frac{\omega r'}{c}\right)\quad\to\quad\left(\frac{\omega}{c}\right)^l\frac{r'^l}{(2l+1)!!}\left[1-\frac{1}{2(2l+3)}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2r'^2+\ldots\right]\quad(r'\to 0), \tag{6}$$

$$\left(\frac{i\omega}{c}\right)h_l^{(1)}\left(\frac{\omega r}{c}\right)\quad=\quad\left(\frac{i\omega}{c}\right)\left(\frac{c}{\omega}\right)^l(-r)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\left(\frac{e^{i\omega r/c}}{\frac{i\omega r}{c}}\right) \tag{7}$$

となる。ただし $(2l+1)!!=(2l+1)(2l-1)(2l-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$ である。式 (6) の第一項のみを式 (5) に代入する。このとき

$$\langle\rho^{(l)}(t')\rangle=\int d\boldsymbol{x}'r'^lP_l(\cos\theta')\rho(\boldsymbol{x}',t') \tag{8}$$

とおくと、その結果が

$$\phi(\boldsymbol{x},t)=\sum_{l=0}^{\infty}\phi_l(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(2l+1)}{(2l+1)!!}(-r)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\frac{1}{r}\left\langle\rho^{(l)}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\rangle, \tag{9}$$

となることを示せ。ベクトルポテンシャルについては慣習上、$l\to l-1$ として、

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=\sum_{l=1}^{\infty}\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(2l-1)}{(2l-1)!!}(-r)^{l-1}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{l-1}\frac{1}{r}\left\langle\boldsymbol{i}^{(l-1)}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\rangle, \tag{10}$$

となることを示せ。ここで

$$\langle\boldsymbol{i}^{(l)}(t')\rangle=\int d\boldsymbol{x}'r'^lP_l(\cos\theta')\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}',t') \tag{11}$$

である。

3. 項 ϕ_l は一般に $\left(\frac{1}{r}\right)^q$ の項からなる。指数について $q_{\min}(l)$, $q_{\max}(l)$ を求め、観測の点から議論せよ。(高次の ϕ_l は支配的になるだろうか？)

$P_l(s)$ は Legendre 多項式、$j_l(s)$ は球面 Bessel 関数、$h_l^{(1)}(s)$ は第 1 種球面 Hankel 関数である。全て誘導にしたがえば出来る。

1. 略
2. 略
3. $q_{\min}=1,\ q_{\max}=l+1$ である。
   r の冪は式 (9) の $r^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\frac{1}{r}\left\langle\rho^{(l)}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\rangle$ からきまる。指数の最小値 $q_{\min}$ は、(d/dr) がすべて $\langle\rho^{(l)}\rangle$ にかかるときで $r^l\left(\frac{1}{r}\right)^l\frac{1}{r}\left(\frac{d}{dr}\right)^l\left\langle\rho^{(l)}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\rangle=\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{c}\right)^l\left(\frac{d}{dt}\right)^l\left\langle\rho^{(l)}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\rangle$ つまり、$q_{\min}=1$。最大値 $q_{\max}$ は (d/dr) がすべて $1/r$ にかかるときで $r^l\left(\frac{1}{r}\right)^l\left\langle\rho^{(l)}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\rangle\left(\frac{d}{dr}\right)^l\frac{1}{r}\propto\left(\frac{1}{r}\right)^{l+1}$ である。

$\boxed{2}$ (双極子放射)
式 (9)、(10) で $l=1$ の場合を考察しよう。

1. 式 (9)、(10) から $l=1$ のスカラーポテンシャル ϕ_1、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}_1$ を書き下せ。
2. 電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}(t)$ を
$$\boldsymbol{p}(t)=\int\boldsymbol{x}'\rho(\boldsymbol{x}',t)d\boldsymbol{x}' \tag{12}$$
   と定義する。電気双極子モーメントを用いて両ポテンシャルを表せ。ここで $\dot{\boldsymbol{p}}(t)=\int d\boldsymbol{x}'\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}',t)$ に注意せよ。(示せ。電荷保存則 $\partial_t\rho(\boldsymbol{x},t)+\operatorname{div}\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x},t)=0$ を用いよ。)
3. ϕ_1 と $\boldsymbol{A}_1$ から作られる電場 $\boldsymbol{E}_1$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}_1$ を計算せよ。
4. 上の結果から、遠方では $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{B}_1$ のどの項が支配的になるか？

5. 支配的になる項から、単位面積、単位時間あたりに放射される平均エネルギー $\overline{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{B}_1$ を計算すると

$$\frac{\mu_0}{32\pi^2 c}\frac{|\boldsymbol{x}\times\ddot{\boldsymbol{p}}(t-\frac{r}{c})|^2}{r^4}\frac{\boldsymbol{x}}{r} \tag{13}$$

となることを示せ。

6. 半径 r の球面上での放射エネルギーの角度分布 $\overline{\boldsymbol{S}}\cdot\frac{\boldsymbol{x}}{r}$ を求めよ。$\ddot{\boldsymbol{p}}$ の方向を z 軸に取るものとする。

7. 放射エネルギーの角度分布を半径 r の球面上で積分し、全放射エネルギーを求めよ。

1.

$$\begin{aligned}
\phi_1(\boldsymbol{x},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r^2}\left\langle\rho^{(1)}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\rangle + \frac{1}{cr}\frac{d}{dt}\left\langle\rho^{(1)}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\rangle\right],\\
\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\left\langle\boldsymbol{i}^{(0)}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\rangle
\end{aligned}$$

2. 電流密度の積分と電気双極子モーメントの関係は、モーメントの k 成分を時間微分することで

$$\dot{p}_k(t) = \int d\boldsymbol{x}' x'_k \frac{\partial\rho}{\partial t}(\boldsymbol{x}',t) = -\int d\boldsymbol{x}' x'_k \mathrm{div}'\,\boldsymbol{i} = -\int d\boldsymbol{x}'\partial'_j(x_k i_j) + \int d\boldsymbol{x}' i_j(\partial'_j x'_k) = \int d\boldsymbol{x}' i_k$$

となる。スカラーポテンシャル ϕ_1、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}_1$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\phi_1(\boldsymbol{x},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\frac{\boldsymbol{x}}{r}\cdot\boldsymbol{p}(t-\frac{r}{c})}{r^2} + \frac{\frac{\boldsymbol{x}}{r}\cdot\dot{\boldsymbol{p}}(t-\frac{r}{c})}{cr}\right],\\
\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\boldsymbol{p}}(t-\frac{r}{c})}{r}
\end{aligned}$$

3. 両ポテンシャルを直接微分すればよい。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_1 &= -\nabla\phi_1 - \partial_t\boldsymbol{A}_1\\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r^3}\boldsymbol{p}\left(t-\frac{r}{c}\right) + \frac{3\boldsymbol{x}\left\{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\}}{r^5} - \frac{1}{cr^2}\dot{\boldsymbol{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) + \frac{3\boldsymbol{x}\left\{\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\}}{cr^4}\right.\\
&\quad\left. -\frac{\ddot{\boldsymbol{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{c^2 r} + \frac{\boldsymbol{x}\left\{\boldsymbol{x}\cdot\ddot{\boldsymbol{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\}}{c^2 r^3}\right]\\
\boldsymbol{B}_1 &= \nabla\times\boldsymbol{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{\boldsymbol{x}\times\dot{\boldsymbol{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3} - \frac{\boldsymbol{x}\times\ddot{\boldsymbol{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}\right]
\end{aligned}$$

4. 遠方 $(r\to\infty)$ で支配的になるのは $(1/r)$ の次数が最も低いもので、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_1 &\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{\ddot{\boldsymbol{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{c^2 r} + \frac{\boldsymbol{x}\left\{\boldsymbol{x}\cdot\ddot{\boldsymbol{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\}}{c^2 r^3}\right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{x}\times\ddot{\boldsymbol{p}})}{r^3},\\
\boldsymbol{B}_1 &\simeq -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{x}\times\ddot{\boldsymbol{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}
\end{aligned}$$

である。いずれも $(1/r)^1$ である。

5. 支配項では、$\boldsymbol{E}_1 = -c\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{B}_1/r$ に注意すると、

$$\overline{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{B}_1 = \frac{c}{2\mu_0}|\boldsymbol{B}_1|^2\frac{\boldsymbol{x}}{r} = \frac{\mu_0}{32\pi^2 c}\frac{|\boldsymbol{x}\times\ddot{\boldsymbol{p}}(t-\frac{r}{c})|^2}{r^4}\frac{\boldsymbol{x}}{r}$$

上の式で双極子モーメントの時間変動は $e^{i\omega t}$ の形であることを仮定している。時間平均は $(\omega/2\pi)\int_0^{2\pi/\omega}dt$ の積分をすることに対応しており、右辺の絶対値は時間変動の振幅の大きさをとると解釈して欲しい。

6. $|\boldsymbol{x} \times \ddot{\boldsymbol{p}}| = |\ddot{\boldsymbol{p}}| r \sin\theta$ をつかう。

$$\overline{\boldsymbol{S}} \cdot \frac{\boldsymbol{x}}{r} = \frac{\mu_0}{32\pi^2 c} \frac{|\boldsymbol{x} \times \ddot{\boldsymbol{p}}(t - \frac{r}{c})|^2}{r^4} = \frac{\mu_0}{32\pi^2 c} \frac{|\ddot{\boldsymbol{p}}(t - \frac{r}{c})|^2}{r^2} \sin^2\theta$$

7. 放射エネルギーの角度分布を半径 r の球面上で積分して全放射エネルギーは以下のようになる。

$$\int \overline{\boldsymbol{S}} \cdot \frac{\boldsymbol{x}}{r} r^2 d\Omega = \frac{\mu_0}{32\pi^2 c} \left|\ddot{\boldsymbol{p}}(t - \frac{r}{c})\right|^2 2\pi \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta = \frac{\mu_0}{12\pi c} \left|\ddot{\boldsymbol{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right|^2$$

ここでも右辺の絶対値は双極子モーメントの 2 階微分の時間変動の振幅をとるということを意味する。