

## 第 5 回問題

## ① 遅延ポテンシャル

$$A(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{x}' \frac{\dot{\mathbf{i}}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \left(t' = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right) \quad (1)$$

の  $|\mathbf{x}'|/|\mathbf{x}| \ll 1$  での漸近的な振舞いをしらべてみよう。これは繁雑であるが以下のような組織的な手続きを経てなされる (多重極展開と呼ばれる)。

1. まず最初に遅延ポテンシャルの時間について  $\delta$  関数を用いて

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{x}' \int dt' \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right) \frac{\rho(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (2)$$

とかく。次に

$$\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \exp\left[-i\omega\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)\right] \quad (3)$$

を用いてポテンシャルを書き直し、 $|\mathbf{x}'| < |\mathbf{x}|$  での関数展開

$$\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = ik \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) j_l(k|\mathbf{x}'|) h_l^{(1)}(k|\mathbf{x}|) P_l(\cos\theta') \quad (4)$$

を使う。ここで  $P_l(s)$  は Legendre 多項式、 $j_l(s)$  は球面 Bessel 関数、 $h_l^{(1)}(s)$  は第 1 種球面 Hankel 関数であり、 $\theta'$  は  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{x}'$  の間の角度である。以下では  $|\mathbf{x}| = r$ ,  $|\mathbf{x}'| = r'$  と書くことにする。さて (2)–(4) の結果、スカラーポテンシャルが

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \int dt' \frac{2l+1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega(t-t')} \left(\frac{i\omega}{c}\right) h_l^{(1)}\left(\frac{\omega r}{c}\right) \int d\mathbf{x}' j_l\left(\frac{\omega r'}{c}\right) P_l(\cos\theta') \rho(\mathbf{x}', t') \quad (5)$$

と表されることを示せ。

2. 電荷が空間スケール  $a$  の中にのみ分布しているとして、電荷分布の振動の周期  $T = 2\pi/\omega$  について  $cT \gg a$  が成り立つとする。(これは、放射される電磁波の波長が電流分布、電荷分布の存在する領域よりも十分大きい極限を考慮することを意味する。) このときの特に関数の振舞いは、それぞれ

$$j_l\left(\frac{\omega r'}{c}\right) \rightarrow \left(\frac{\omega}{c}\right)^l \frac{r'^l}{(2l+1)!!} \left[1 - \frac{1}{2(2l+3)} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 r'^2 + \dots\right] \quad (r' \rightarrow 0), \quad (6)$$

$$\left(\frac{i\omega}{c}\right) h_l^{(1)}\left(\frac{\omega r}{c}\right) = \left(\frac{i\omega}{c}\right) \left(\frac{c}{\omega}\right)^l (-r)^l \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^l \left(\frac{e^{i\omega r/c}}{i\omega r/c}\right) \quad (7)$$

となる。ただし  $(2l+1)!! = (2l+1)(2l-1)(2l-3)\dots 5\cdot 3\cdot 1$  である。式 (6) の第一項のみを式 (5) に代入する。このとき

$$\langle \rho^{(l)}(t') \rangle = \int d\mathbf{x}' r'^l P_l(\cos\theta') \rho(\mathbf{x}', t') \quad (8)$$

とくと、その結果が

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \phi_l(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{(2l+1)!!} (-r)^l \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^l \frac{1}{r} \left\langle \rho^{(l)} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\rangle, \quad (9)$$

となることを示せ。ベクトルポテンシャルについては慣習上、 $l \rightarrow l-1$  として、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{A}_l(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(2l-1)}{(2l-1)!!} (-r)^{l-1} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{l-1} \frac{1}{r} \left\langle \mathbf{i}^{(l-1)} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\rangle, \quad (10)$$

となることを示せ。ここで

$$\langle \mathbf{i}^{(l)}(t') \rangle = \int d\mathbf{x}' r'^l P_l(\cos \theta') \mathbf{i}(\mathbf{x}', t') \quad (11)$$

である。

3. 項  $\phi_l$  は一般に  $\left(\frac{1}{r}\right)^q$  の項からなる。指数について  $q_{\min}(l)$ ,  $q_{\max}(l)$  を求め、観測の点から議論せよ。(高次の  $\phi_l$  は支配的になるだろうか?)

2 式 (9)、(10) で  $l=1$  の場合を考察しよう。

1. 式 (9)、(10) から  $l=1$  のスカラーポテンシャル  $\phi_1$ 、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}_1$  を書き下せ。
2. 電気双極子モーメント  $\mathbf{p}(t)$  を

$$\mathbf{p}(t) = \int \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' \quad (12)$$

と定義する。電気双極子モーメントを用いて両ポテンシャルを表せ。ここで  $\dot{\mathbf{p}}(t) = \int d\mathbf{x}' \mathbf{i}(\mathbf{x}', t)$  に注意せよ。(示せ。電荷保存則  $\partial_t \rho(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) = 0$  を用いよ。)

3.  $\phi_1$  と  $\mathbf{A}_1$  から作られる電場  $\mathbf{E}_1$  と磁束密度  $\mathbf{B}_1$  を計算せよ。
4. 上の結果から、遠方では  $\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1$  のどの項が支配的になるか?
5. 支配的になる項から、単位面積、単位時間あたりに放射される平均エネルギー  $\bar{S} = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_1$  を計算すると

$$\frac{\mu_0}{32\pi^2 c} \frac{|\mathbf{x} \times \ddot{\mathbf{p}}(t - \frac{r}{c})|^2}{r^4} \frac{\mathbf{x}}{r} \quad (13)$$

となることを示せ。

6. 半径  $r$  の球面上での放射エネルギーの角度分布  $\bar{S} \cdot \frac{\mathbf{x}}{r}$  を求めよ。 $\ddot{\mathbf{p}}$  の方向を  $z$  軸に取るものとする。
7. 放射エネルギーの角度分布を半径  $r$  の球面上で積分し、全放射エネルギーを求めよ。