

第 4 回問題

- ① 既知関数 $f(\mathbf{x})$ があたえられたとき、未知関数 $y(\mathbf{x})$ についての微分方程式

$$(\nabla^2 + \lambda^2)y(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}) \quad (1)$$

を Helmholtz 型微分方程式という。右辺の $f(\mathbf{x})$ は「源」(ソース)とよばれることがある。ここでは境界条件を無限にひろがった 3 次元空間中十分遠方で 0 になるものとして、解を Green 関数の方法でもとめよう。

1. Green 関数 $G(\mathbf{x})$ を以下の解として与える。

$$(\nabla^2 + \lambda^2)G(\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x}) \quad (2)$$

このとき、 $\int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')f(\mathbf{x}')d\mathbf{x}'$ が式 (1) の解になっていることを確かめよ。

2. Fourier 変換を導入して $G(\mathbf{x})$ を求めることができる。

$$G(\mathbf{x}) = \int \hat{G}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d^3k, \quad (3)$$

$$\hat{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int G(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d^3x, \quad (4)$$

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d^3k \quad (5)$$

をそれぞれ (2) に代入し、 $\hat{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\mathbf{k}|^2 - \lambda^2}$ となることをしめせ。

3. 積分

$$G(\mathbf{x}) = \int \hat{G}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d^3k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\lambda^2 - |\mathbf{k}|^2} d^3k \quad (6)$$

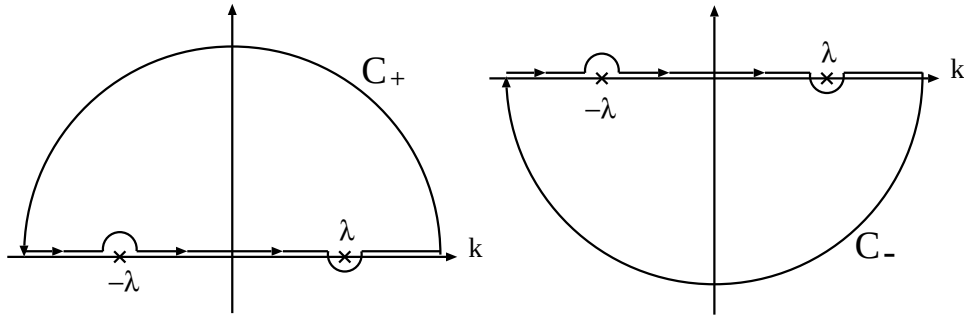
は複素空間に拡張することによって実行することができる。まず、 $\mathbf{k}$ を球座標 (k, θ, φ) をつかって書き直すことで以下になることをしめせ。(ここで角度 θ はベクトル $\mathbf{x}$ とベクトル $\mathbf{k}$ の間の角度である。すると $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k|\mathbf{x}| \cos \theta$ とかける。)

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}) &= \frac{-i}{8\pi^2|\mathbf{x}|} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k}{k^2 - \lambda^2} \left(e^{ik|\mathbf{x}|} - e^{-ik|\mathbf{x}|} \right) \\ &= \frac{-i}{16\pi^2|\mathbf{x}|} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left\{ \left(\frac{1}{k + \lambda} + \frac{1}{k - \lambda} \right) e^{ik|\mathbf{x}|} - \left(\frac{1}{k + \lambda} + \frac{1}{k - \lambda} \right) e^{-ik|\mathbf{x}|} \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

4. 式 (7) の被積分関数第一項については下図の C_+ の経路をとり、第二項については、 C_- の経路をとって留数定理から (7) の積分をもとめよ。また、逆に経路 C_+ で $k = -\lambda$ の極のみを経路にとりこみ、経路 C_- で $k = \lambda$ の極のみを取り込むことで積分を評価することもできる。両者の解が

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm i\lambda|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} \quad (8)$$

となることをしめせ。これが Helmholtz 型方程式の Green 関数である。



2 1. Maxwell 方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{i}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (9)$$

をベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ 、スカラーポテンシャル ϕ を用いて書き直せ。ただし、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (10)$$

となるようにゲージを選ぶものとする。

2. $\mathbf{A}, \phi$ の方程式を Helmholtz 方程式の Green 関数を用いて解くことを考えよう。まず、それぞれの量を時間についてフーリエ変換する。

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (11)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (12)$$

(電流密度 $\mathbf{i}$ 、電荷密度 ρ も同様に変換する)。これを $\mathbf{A}, \phi$ の方程式に代入すると

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \omega) = -\mu_0 \hat{\mathbf{i}}(\mathbf{x}, \omega), \quad \nabla^2 \hat{\phi}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\phi}(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{\hat{\rho}(\mathbf{x}, \omega)}{\epsilon_0}. \quad (13)$$

となることを示せ。つまり $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\phi}$ は Helmholtz 型方程式に従う。

3. Helmholtz 型方程式の Green 関数 $(\nabla^2 + \lambda^2)G(\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x})$ の表現 $G(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm i\lambda|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|}$ をもちいて式 (13) の解を表せ。

4. 上の結果に電流密度 $\hat{\mathbf{i}}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{i}(\mathbf{x}, t') e^{-i\omega t'} dt'$ を代入すると、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{x}' \int dt' \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t - t' \pm \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{x}' \frac{\mathbf{i}\left(\mathbf{x}', t \pm \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (14)$$

となることを示せ。 $\phi(\mathbf{x}', t)$ の表現はどうなるか？この物理的解釈をのべよ。

5. $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}, t)$ の最終的な表現が Lorentz ゲージの条件 (10) を満たすことをしめせ。