

第3回問題の解答

(平成 20 年 5 月 15 日版)

① (点電荷系と電磁場のエネルギー保存則、ポインティングベクトル)

点電荷 (質量 m_i 、電荷 q_i 、 $i = 1, \dots, N$) が電磁場中で運動している。これらのエネルギー保存則を非相対論的に考察しよう。それぞれの電荷の軌道を $\mathbf{X}_i(t)$ とおくと、運動方程式は

$$m_i \ddot{\mathbf{X}}_i = q_i [\mathbf{E}(\mathbf{X}_i(t), t) + \dot{\mathbf{X}}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{X}_i(t), t)] \quad (1)$$

で与えられる。これは δ 関数をもちいて全空間の積分で書き直すと

$$m_i \ddot{\mathbf{X}}_i = \int d\mathbf{x} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t)) q_i [\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{X}}_i(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)] \quad (2)$$

となる。

1. 式 (2) と $\dot{\mathbf{X}}_i$ との内積をとって $i = 1, \dots, N$ の和をとることにより運動エネルギーの和の時間変化が

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\dot{\mathbf{X}}_i|^2 \right] = \sum_{i=1}^N \int d\mathbf{x} q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i) \dot{\mathbf{X}}_i \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

となることを示せ。

2. 点電荷系が電荷と電流を担うときの Maxwell 方程式は

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \dot{\mathbf{X}}_i(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t)), \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t)), \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (7)$$

で与えられる。式 (3) の右辺の電流密度の部分 $q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i) \dot{\mathbf{X}}_i$ を Ampère-Maxwell 則 (5) を用いて $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ で書き直せ。

3. 電磁場のエネルギー密度 w は $w = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$ で定義される。 $\partial w / \partial t$ が Faraday の誘導則 (4) を用いると

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (8)$$

と表せることをしめせ。

4. 以上の結果から、点電荷の運動エネルギーと電磁場のエネルギーの時間変化が

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\dot{\mathbf{X}}_i|^2 + \int d\mathbf{x} \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \right] = \int d\mathbf{x} [\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})] \quad (9)$$

となることをしめせ。

5. 式 (9) の右辺は恒等式 $\nabla \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{N}) = \mathbf{N} \cdot (\nabla \times \mathbf{M}) - \mathbf{M} \cdot (\nabla \times \mathbf{N})$ (証明せよ) をもちいて

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\dot{\mathbf{X}}_i|^2 + \int d\mathbf{x} \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \right] = - \int d\mathbf{x} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (10)$$

となることを示せ。右辺はガウスの定理から表面積分になおすことができる。 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ (ポインティングベクトル) の意味を述べよ。

1. ローレンツ力は速度に垂直なので仕事をしない。

$$2. \frac{d}{dt} [\sum m_i |\dot{\mathbf{X}}_i|^2 / 2] = \int d\mathbf{x} [\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \partial \mathbf{D} / \partial t]$$

3. $\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times \mathbf{E}$ で $\mathbf{B}$ の時間微分を消去する。

4. 略

5. $\partial_i \epsilon_{ijk} M_j N_k = N_k \epsilon_{ijk} \partial_i M_j + M_j \epsilon_{ijk} \partial_i N_k = N_k \epsilon_{kij} \partial_i M_j - M_j \epsilon_{jik} \partial_i N_k$ ポインティングベクトルの意味は、考えている領域の境界面を通して単位時間に領域外に出ていく単位面積あたりのエネルギーをあらわす。

2 平面 $z = 0$ 上に $\sigma = \sigma_0 \sin(ax) \sin(by)$ の表面電荷分布が与えられたときのポテンシャルを求めよ。ここで、 σ_0, a, b は定数とする。

$z \neq 0$ での静電ポテンシャルは Laplace 方程式 $\nabla^2 \phi = 0$ を満たす。ここでは、その一般解を用いる。解を $\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ と変数分離して求めると

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

となるので、 α, β を実定数として

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2, \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \alpha^2 + \beta^2$$

とおくことができる。従って、Laplace 方程式の解 ϕ は

$$e^{i\alpha x} e^{i\beta y} e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z}$$

の重ね合わせで表される。(これは、電荷分布の形から x, y については周期境界条件のため Fourier 変換をとり、 z 方向については Laplace 変換をしたと見ることでもある) 特に電荷分布から無限に離れると電位がゼロになる ($z \rightarrow \pm\infty$ で $\phi \rightarrow 0$) 条件を課すと z に関する指数部分の符号がきまる。つまり

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{i(\alpha x + \beta y)} e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z} \text{の重ねあわせ} & (z > 0), \\ e^{i(\alpha x + \beta y)} e^{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z} \text{の重ねあわせ} & (z < 0). \end{cases}$$

となる (現実にはこれの実部をとる)。

次に、境界条件 ($z = 0$ での電荷分布) を考慮して、 α, β と重ねあわせに現れる係数を決定する。Gauss の法則 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$ を $z = 0$ を含む薄い長方体領域で体積分する (x, y については適当に広い領域をとる)。

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^x dx' \int_0^y dy' \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dz' \sigma_0 \sin ax' \sin by' \delta(z') = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \int_0^x dx' \int_0^y dy' \sin ax' \sin by'$$

この左辺は次のように分解される (面積分をしている直方体の各面で見ている)。

$$\begin{aligned}\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = & \int_0^x dx' \int_0^y dy' E_z(x', y', \varepsilon) + \int_0^x dx' \int_0^y dy' [-E_z(x', y', -\varepsilon)] \\ & + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dz' \int_0^y dy' E_x(x, y', z') + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dz' \int_0^y dy' [-E_x(0, y', z')] \\ & + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dz' \int_0^x dx' E_y(x', y, z') + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dz' \int_0^x dx' [-E_y(x', 0, z')]\end{aligned}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとると直方体の側面からの寄与がゼロになるので以下の関係を得る。

$$\int_0^x dx' \int_0^y dy' [E_z(x', y', +0) - E_z(x', y', -0)] = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \int_0^x dx' \int_0^y dy' \sin ax' \sin by' \quad \dots (*)$$

ここで、ポテンシャルを

$$\phi(x, y, z) = \begin{cases} \phi_0 \cos(\alpha x + \beta y) e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z} & (z > 0), \\ \phi_0 \cos(\alpha x + \beta y) e^{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z} & (z < 0) \end{cases}$$

とおく (定数 ϕ_0 が $z > 0, z < 0$ で等しいのは系の対称性による)。すると、

$$\begin{aligned}E_z(x', y', +0) &= \phi_0 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\alpha x + \beta y), \\ E_z(x', y', -0) &= -\phi_0 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\alpha x + \beta y)\end{aligned}$$

であるので、式 (*) は

$$\int_0^x dx' \int_0^y dy' 2\phi_0 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\alpha x' + \beta y') = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \int_0^x dx' \int_0^y dy' \sin ax' \sin by'$$

となる。上式は x, y についての任意の領域で成立するので被積分関数どうしが等しい、つまり

$$2\phi_0 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\alpha x + \beta y) \text{ の重ね合わせ } = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \sin ax \sin by = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} [\cos(ax - by) - \cos(ax + by)]$$

である。以上から、重ねあわせで現れるものは $(\alpha, \beta) = (a, b), (a, -b)$ とわかり、それぞれの (α, β) に対応する係数 ϕ_0 も決定することができる。最終的に求めるポテンシャルは

$$\phi(x) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0 \sqrt{a^2 + b^2}} \sin(ax) \sin(by) e^{\pm \sqrt{a^2 + b^2} z}$$

となる。複号は $z > 0$ で $-$ 、 $z < 0$ で $+$ を選ぶ。

③ 半径 R の球の表面上に表面電荷分布 $\sigma = a_0 \cos \theta$ (軸対称) が与えられたときの球の内外でのポテンシャルと電場をもとめよ。

Laplace 方程式 $\nabla^2 \phi = 0$ が球の内外で成立する。前問と同様にその一般解から出発して係数を境界条件から決定すればよい。今の場合は球座標系 (r, θ, φ) での一般解を用いる。ここでは系が座標 φ に依存しないので r, θ の依存性だけを考慮すればよい。その場合の φ に依存しない Laplace 方程式の一般解は

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} [\alpha_l r^l + \beta_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta)$$

である。ここで $P_l(s)$ は Legendre(ルジャンドル) 多項式である。球の内部で静電ポテンシャル ϕ が正則であること、また球から十分遠方 $r \rightarrow \infty$ で $\phi \rightarrow 0$ である条件を課すと

$$\phi(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l r^l P_l(\cos \theta) & r < R, \\ \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) & r > R. \end{cases} \quad \dots (**)$$

となる。次に $r = R$ での電荷分布を境界条件として、定数 α_l, β_l を決定する。つまり $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ を電荷の存在する適当な領域で積分して α_l, β_l と電荷分布を関係づければよいことになる。ここでは、 $R - \varepsilon < r < R + \varepsilon$ かつ立体角 D でかこまれる領域で積分をする。

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} r^2 dr \delta(r - R) \int_D d\Omega a_0 \cos \theta = \frac{a_0 R^2}{\epsilon_0} \int_D d\Omega \cos \theta$$

ここで $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ は微小立体角要素である。最左辺の面積分は、両底面の $\mathbf{n}$ が単位動径ベクトルと平行であることに注意すると $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \pm E_r$ (E_r は電場の r 成分、上面では +、下面では -) であるから、

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_D (R + \varepsilon)^2 d\Omega E_r(R + \varepsilon, \theta) + \int_D (R - \varepsilon)^2 d\Omega [-E_r(R - \varepsilon, \theta)] + (\text{側面上での面積分})$$

となる。さらに $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとると、側面上での面積分はゼロになるので

$$\int_D [E_r(R + 0, \theta) - E_r(R - 0, \theta)] R^2 d\Omega = \frac{R^2 a_0}{\epsilon_0} \int_D \cos \theta d\Omega$$

となる。これが任意の立体角領域 D で成り立つので、結局

$$E_r(R + 0, \theta) - E_r(R - 0, \theta) = \frac{a_0}{\epsilon_0} \cos \theta \quad \dots (\dagger)$$

を得る。式 (**) から $E_r(r, \theta) = -\partial\phi/\partial r$ を求めて $E_r(r = R \pm 0, \theta)$ を求めると

$$\begin{aligned} E_r(R + 0, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l (l + 1) R^{-(l+2)} P_l(\cos \theta), \\ E_r(R - 0, \theta) &= \sum_{l=1}^{\infty} -\alpha_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) \end{aligned}$$

となる。これを式 (†) に代入し、 $\cos \theta = P_1(\cos \theta)$ に注意して両辺を比較すると $l = 1$ の成分だけが残ることがわかる ($l \neq 1$ では $\alpha_l = \beta_l = 0$)。つまり、

$$\beta_1 2R^{-3} + \alpha_1 = \frac{a_0}{\epsilon_0}$$

である。定数 α_1, β_1 を決定するのにもうひとつ条件が必要である。 $r = R$ でのポテンシャルが連続であること ($\phi(R - 0, \theta) = \phi(R + 0, \theta)$) を課すと

$$\alpha_1 = \beta_1 R^{-3}$$

を得る。以上の二つの式から定数が

$$\alpha_1 = \frac{a_0}{3\epsilon_0}, \quad \beta_1 = \frac{a_0 R^3}{4\epsilon_0}$$

と決定される。静電ポテンシャルは以下の通り。

$$\phi(r, \theta) = \begin{cases} \frac{a_0}{3\epsilon_0} r \cos \theta & r < R(\text{球の内部}), \\ \frac{a_0}{3\epsilon_0} R^3 \frac{1}{r^2} \cos \theta & r > R(\text{球の外部}). \end{cases}$$

電場の (r, θ, φ) 成分も以下の通り。

$$E_r(r, \theta) = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{a_0}{3\epsilon_0} \cos \theta & r < R, \\ \frac{2a_0}{3\epsilon_0} R^3 \frac{1}{r^3} \cos \theta & r > R. \end{cases}$$

$$E_\theta(r, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \begin{cases} \frac{a_0}{3\epsilon_0} \sin \theta & r < R, \\ \frac{a_0}{3\epsilon_0} R^3 \frac{1}{r^3} \sin \theta & r > R. \end{cases}$$

$$E_\varphi(r, \theta) = 0.$$

4 真空中 (電荷密度 $\rho = 0$, 電流密度 $i = 0$) における平面電磁波を $A(x, t) = a \cos(k \cdot x - \omega t)$, $\phi(x, t) = 0$ の形で求め、 a, k, ω の関係を見出せ。またエネルギー密度、運動量密度の時間平均をもとめよ。

ローレンツゲージ $\nabla \cdot A + \partial_t \phi / c^2 = 0$ より $k \cdot a = 0$ がまず得られる。次に磁束密度 $B = \nabla \times A = -(k \times a) \sin(k \cdot x - \omega t)$ であり、電場 $E = -\nabla \phi - \partial_t A = -a\omega \sin(k \cdot x - \omega t)$ である。これを波動方程式 $(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{c^2})A = 0$ に代入すると、分散関係 $\omega = c|k|$ が得られる。

電磁場のエネルギー密度 $W(x, t)$ は

$$\begin{aligned} W(x, t) &\equiv \frac{1}{2} (E \cdot D + H \cdot B) = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 |a|^2 \omega^2 + \frac{|a \times k|^2}{\mu_0} \right) \sin^2(k \cdot x - \omega t) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} |a|^2 (c^2 \omega^2 + |k|^2) \sin^2(k \cdot x - \omega t) = \frac{1}{\mu_0} |a|^2 |k|^2 \sin^2(k \cdot x - \omega t) \end{aligned}$$

である。この時間平均 $\overline{W}(x)$ は

$$\overline{W}(x) \equiv \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} W(x, t) dt = \frac{1}{\mu_0} |a|^2 |k|^2 \frac{1}{2}$$

である。運動量密度 $P(x, t)/c^2$ は

$$P(x, t)/c^2 = \frac{1}{c^2} E \times H = \frac{1}{c^2 \mu_0} \omega a \times (k \times a) \sin^2(k \cdot x - \omega t) = \frac{1}{c \mu_0} |a|^2 |k| \sin^2(k \cdot x - \omega t) \hat{k}$$

となる。 $(\omega = c|k|$ であり、 $a \perp k$ より $a \times (k \times a) = |a|^2 k$) ここで $\hat{k} = k/|k|$ である。その時間平均 $\overline{P}/c^2$ は

$$\frac{\overline{P}}{c^2} = \frac{1}{2c\mu_0} |a|^2 |k| \hat{k} = \frac{1}{c} \overline{W} \hat{k}$$

となる。