

第 3 回問題

- ① 点電荷 (質量 m_i 、電荷 q_i 、 $i = 1, \dots, N$) が電磁場中で運動している。これらのエネルギー保存則を非相対論的に考察しよう。それぞれの電荷の軌道を $\mathbf{X}_i(t)$ とおくと、運動方程式は

$$m_i \ddot{\mathbf{X}}_i = q_i [\mathbf{E}(\mathbf{X}_i(t), t) + \dot{\mathbf{X}}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{X}_i(t), t)] \quad (1)$$

で与えられる。これは δ 関数をもちいて全空間の積分で書き直すと

$$m_i \ddot{\mathbf{X}}_i = \int d\mathbf{x} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t)) q_i [\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{X}}_i(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)] \quad (2)$$

となる。

1. 式 (2) と $\dot{\mathbf{X}}_i$ との内積をとって $i = 1, \dots, N$ の和をとることにより運動エネルギーの和の時間変化が

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\dot{\mathbf{X}}_i|^2 \right] = \sum_{i=1}^N \int d\mathbf{x} q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i) \dot{\mathbf{X}}_i \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

となることを示せ。

2. 点電荷系が電荷と電流を担うときの Maxwell 方程式は

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \dot{\mathbf{X}}_i(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t)), \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t)), \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (7)$$

で与えられる。式 (3) の右辺の電流密度の部分 $q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i) \dot{\mathbf{X}}_i$ を Ampère-Maxwell 則 (5) を用いて $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ で書き直せ。

3. 電磁場のエネルギー密度 w は $w = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$ で定義される。 $\partial w / \partial t$ が Faraday の誘導則 (4) を用いると

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (8)$$

と表せることをしめせ。

4. 以上の結果から、点電荷の運動エネルギーと電磁場のエネルギーの時間変化が

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\dot{\mathbf{X}}_i|^2 + \int d\mathbf{x} \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \right] = \int d\mathbf{x} [\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})] \quad (9)$$

となることをしめせ。

5. 式 (9) の右辺は恒等式 $\nabla \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{N}) = \mathbf{N} \cdot (\nabla \times \mathbf{M}) - \mathbf{M} \cdot (\nabla \times \mathbf{N})$ (証明せよ) をもちいて

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\dot{\mathbf{X}}_i|^2 + \int d\mathbf{x} \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \right] = - \int d\mathbf{x} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (10)$$

となることを示せ。右辺はガウスの定理から表面積分になおすことができる。 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ (ポインティングベクトル) の意味を述べよ。

- ② 平面 $z = 0$ 上に $\sigma = \sigma_0 \sin(ax) \sin(by)$ の表面電荷分布が与えられたときのポテンシャルを求めよ。ここで、 σ_0, a, b は定数とする。
- ③ 半径 R の球の表面上に表面電荷分布 $\sigma = a_0 \cos \theta$ (軸対称) が与えられたときの球の内外でのポテンシャルと電場をもとめよ。
- ④ 真空中 (電荷密度 $\rho = 0$, 電流密度 $\mathbf{j} = \mathbf{0}$) における平面電磁波を $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$, $\phi(\mathbf{x}, t) = 0$ の形で求め、 $\mathbf{a}, \mathbf{k}, \omega$ の関係を見出せ。またエネルギー密度、運動量密度の時間平均をもとめよ。