

第2回問題の解答

(平成 20 年 5 月 6 日版)

1

1. 真空中の Maxwell 方程式

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{i}(\mathbf{x}, t), \quad (2)$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t), \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (4)$$

について、ベクトル解析の結果をもちいて、ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ とスカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{x}, t)$ が導入できることを示せ。

2. Maxwell 方程式から $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ と $\phi(\mathbf{x}, t)$ が満たす方程式を導け。

3. ベクトルポテンシャル、スカラーポテンシャルに、任意のスカラー関数 $u(\mathbf{x}, t)$ を使って

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \nabla u(\mathbf{x}, t), \quad \phi'(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (5)$$

としても $\mathbf{A}'$ と ϕ' からつくられる磁束密度と電場 $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$ が不変であることをしめせ。

4. ポテンシャル $\mathbf{A}$ と ϕ の方程式が波動方程式の形をとるためには、 $\mathbf{A}$ と ϕ はどのような関係を満たす必要があるか？その関係は $u(\mathbf{x}, t)$ をどのように選べば良いか述べよ。

1. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ より、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ とおける。これを式 (1) に入れると $\nabla \times (\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}) = 0$ となるので $\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A} = -\nabla \phi$ とおくことができる (−をつけるのは慣習による)。従って、 $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla \phi$ と表せる。

- 2.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\partial_t \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - \nabla \phi(\mathbf{x}, t),$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t),$$

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \phi) + (\epsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 - \nabla^2) \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{i},$$

$$-\nabla \cdot \partial_t \mathbf{A} - \nabla^2 \phi = \rho / \epsilon_0.$$

3. $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ の表式に $\mathbf{A}'$ と ϕ' を代入すると u に関する微分がキャンセルすることがわかる。

4. ローレンツゲージの条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \phi = 0$ を満たす必要がある。任意のポテンシャル $\mathbf{A}'$ と ϕ' についても、ゲージ u の自由度をつかって $\mathbf{A}_L = \mathbf{A}' + \nabla u$, $\phi_L = \phi' - \partial_t u$ として、 $\nabla^2 u - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 u = -(\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \phi)$ とすればローレンツゲージの条件を満たすようにセットできる。

ここで使われている単位系では、 $\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$ である。

② 無限にひろがった 3 次元真空中に時間に依存しない電荷分布 $\rho(\mathbf{x})$ があるとき、Maxell 方程式から静電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ を Poisson 方程式の Green 関数を使って求めてみよう。

1. 静電場 $\mathbf{E}$ が従う方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \quad (6)$$

を静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{x})$ を用いて書換えると、Poisson 方程式

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \phi(\mathbf{x}) = -\frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \quad (7)$$

となることを示せ。

2. Poisson 方程式の Green 関数 $G(\mathbf{x})$ を次の式で定義する。

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x}) \quad (8)$$

このとき

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (9)$$

が Poisson 方程式 (7) の解になることを示せ。また、Green 関数の物理的意味を述べよ。

3. デルタ関数 $\delta(\mathbf{x})$ は Fourier 積分で

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad (10)$$

と与えられる。また Green 関数は

$$G(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad (11)$$

と表される。Green 関数の Fourier 変換 $\hat{G}(\mathbf{k})$ はどのように表されるか？

4. 波数ベクトル $\mathbf{k}$ についての積分を実行し、Green 関数 $G(\mathbf{x})$ を求めよ (フーリエ積分の実行時には $\mathbf{k}$ について極座標表示を用いて、最終的に留数定理を使うとよい)。

また静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{x})$ を電荷密度 $\rho(\mathbf{x})$ で表せ。さらに電場 $\mathbf{E}$ の表式も求めよ。

1. 略

2. 前半略。Green 関数の物理的意味は、原点にある「点電荷」 $\epsilon_0\delta(\mathbf{x})$ がつくる静電ポテンシャルということ (右辺のデルタ関数を電荷密度と解釈する)。

3. 式 (8) に Fourier 積分の表式をいれると

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-|\mathbf{k}|^2) \hat{G}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \dots (*)$$

となるので、両辺を比較して

$$\hat{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\mathbf{k}|^2}.$$

あるいは、式(*)の両辺に $e^{i\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}}$ をかけて $\mathbf{x}$ で積分をすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} (-|\mathbf{k}|^2) \hat{G}(\mathbf{k}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{m})\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{m})\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}$$

となり、デルタ関数の表式 $\int e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{m})\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}+\mathbf{m})$ に注意すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} (-|\mathbf{k}|^2) \hat{G}(\mathbf{k}) (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}+\mathbf{m}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}+\mathbf{m})$$

従って、同じ結果 $\hat{G}(\mathbf{m}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\mathbf{m}|^2}$ を得る。

4. 前問の結果を代入する。

$$G(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\mathbf{k}|^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}$$

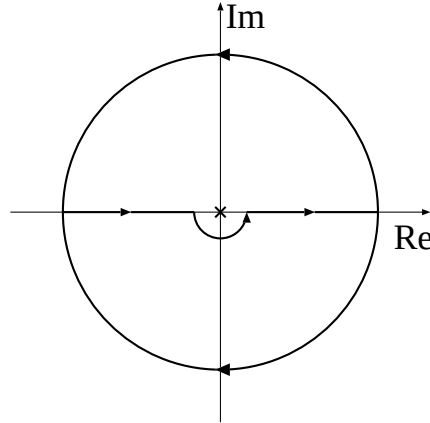
ベクトル $\mathbf{x}$ と波数ベクトル $\mathbf{k}$ の成す角を θ とすると、 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = kx \cos \theta$ とかける ($|\mathbf{k}| \equiv k, |\mathbf{x}| \equiv x$)。
 $\mathbf{k}$ についての積分を極座標でかくと上式の積分は次のようになる。

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dk k^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \frac{1}{k^2} e^{ikx \cos \theta} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin kx}{kx} dk.$$

θ についての積分は $\cos \theta = t$ と変数変換すればよい。最後の積分は $kx \equiv K$ とおくと

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin kx}{kx} dk = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} \frac{\sin K}{K} dK = \frac{1}{x} \frac{1}{4i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iK} - e^{-iK}}{K} dK$$

最後は原点の極 (pole) について留数定理を用いれば良い。下図で、 e^{ik} の項については上をまわる経路で、 e^{-ik} の積分については下をまわる経路をとる。次に経路の半径を無限大にすればよい (すると、円弧上の積分がゼロになり、実軸上からの寄与だけが残る)。図では原点の極を上を経路に含めた。



つまり、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iK} - e^{-iK}}{K} dK = 2\pi i$$

であるので、 $\int_0^{\infty} \frac{\sin kx}{kx} dk = \frac{\pi}{2x}$. 従って、Green 関数は

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} \frac{1}{4\pi |\mathbf{x}|}$$

である。Poisson 方程式の解は

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'$$

で与えられる。電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x})$ より、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d\mathbf{x}'$$

である ($\nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -(\mathbf{x} - \mathbf{x}')/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3$)。これは Coulomb の法則に対応している。

3 定常な電荷分布 $\rho(\mathbf{x})$ があるとき、電荷分布が存在する場所から非常に遠い場所での静電場の漸近的な表現を考えよう。

1. 点 $\mathbf{r}$ での静電ポテンシャルは

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} d\mathbf{x} \quad (12)$$

である。ここで、電荷 $\rho(\mathbf{x})$ の分布する範囲がおおよそ $|\mathbf{x}| < a$ にあるとする (位置ベクトル原点はこの範囲内にとる)。電荷分布から遠く離れた点 $\mathbf{r}$ ($|\mathbf{r}| \gg a$) での静電ポテンシャルが

$$\phi(\mathbf{r}) = \varphi_0 + \varphi_1 \left(\frac{a}{|\mathbf{r}|} \right) + \varphi_2 \left(\frac{a}{|\mathbf{r}|} \right)^2 + \varphi_3 \left(\frac{a}{|\mathbf{r}|} \right)^3 + \dots \quad (13)$$

という $a/|\mathbf{r}|$ のべき級数で表されると便利である (なぜか?)。この表式を詳しく見てみよう。ここで、 $r = |\mathbf{r}|$, $x = |\mathbf{x}|$ として、 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{x} = rx \cos \theta$ とおき、式 (12) の被積分関数中の $\mathbf{r}$ が関係するところを x/r のべきで級数展開する。

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2 - 2rx \cos \theta}} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(\frac{x}{r} \right)^l \quad (14)$$

最初の 3 項 $P_0(s)$, $P_1(s)$, $P_2(s)$ を求めよ。

2. 最低次の項 $l = 0$ があらわす静電ポテンシャル $\phi_0(\mathbf{r})$ を求めよ。その物理的意味を述べよ。

3. $l = 1$ があらわす静電ポテンシャル $\phi_1(\mathbf{r})$ を求めよ。ただし、電気双極子能率 $\mathbf{p}$

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (15)$$

を用いよ。

4. $l = 2$ があらわす静電ポテンシャル $\phi_2(\mathbf{r})$ を求めよ。ただし、電気四重極子能率テンソル Q_{ij} の縮約和

$$Q = Q_{ij} n_i n_j = \int \left[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) - \frac{1}{3} x^2 \right] \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (16)$$

を用いよ ($\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, $Q_{ij} = \int (x_i x_j - \delta_{ij} x^2/3) \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$)。

1. $a/|\mathbf{r}| \rightarrow 0$ の極限を考えている場合は、ポテンシャルが問題のような巾級数で表されていると、最初の数項を考慮するだけで良いので取扱いが便利である。

$$P_0(s) = 1, P_1(s) = s, P_2(s) = (3s^2 - 1)/2.$$

2. $\phi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. 条件 $r \gg a$ で最も支配的な ϕ_0 は全電荷が原点に集中した場合のクーロンポテンシャルと同じになる。全電荷がキャンセル $\int \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ する場合は $\phi_0 = 0$ となって ϕ_1 以降の $1/r$ についての高次項が大事になる。
3. $\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \int r x \cos \theta \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \mathbf{p} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$
4. $\phi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{2} \frac{1}{r^5} \int \left[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{x}) - \frac{1}{3} r^2 x^2 \right] d\mathbf{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{2} \frac{1}{r^3} n_i n_j \int \left[x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} x^2 \right] d\mathbf{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{2} \frac{Q}{r^3}$

4 静電場 $\mathbf{E}$ から電気双極子 $\mathbf{p}$ に働く力は $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$ で与えられることを示せ。また相対位置 $\mathbf{r}$ におかれた二つの双極子 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ の間の相互作用エネルギーおよび働く力を求めよ。

(前半) 原点から $\pm \mathbf{a}$ の位置にそれぞれ電荷 $\pm q$ があるとする。ここで $|\mathbf{a}| \ll 1$ である。このとき電気双極子モーメント $\mathbf{p} = 2q\mathbf{a}$ である。電場からかかる力 $\mathbf{F}$ の i 成分は次のようになる。

$$\begin{aligned} F_i &= qE_i(\mathbf{a}) + (-q)E_i(-\mathbf{a}) = q[E_i(\mathbf{o}) + (\partial_j E_i)a_j - E_i(\mathbf{o}) - (\partial_j E_i)(-a_j) + (\text{h.o.t})] \\ &\simeq 2qa_j \partial_j E_i = p_j \partial_j E_i \end{aligned}$$

(h.o.t) は a_j についての高次項を表す。よって、 $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$ である。また、静電ポテンシャルを用いて $E_i = -\partial_i \phi$ であるので $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$ の i 成分は次のように変形できる

$$p_j \partial_j E_i = -p_j \partial_j \partial_i \phi = p_j \partial_i E_j = \partial_i (p_j E_j) - E_j (\partial_i p_j) = \partial_i (p_j E_j)$$

($\mathbf{p}$ は定ベクトル)。従って $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$ である。

(後半) 双極子 $\mathbf{p}_1$ が $\mathbf{r}$ の位置につくる電場は

$$\mathbf{E}_{1 \rightarrow 2} = -\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\mathbf{p}_1}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})}{r^4} \frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$

である ($r \equiv |\mathbf{r}|$)。前半の結果から、双極子 $\mathbf{p}_2$ が受ける力は

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \nabla(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_{1 \rightarrow 2}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(-\frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right)$$

相互作用エネルギーを U とすると、 $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\nabla U$ であるので、

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right)$$

働く力は、 $\mathbf{n} \equiv \mathbf{r}/r$ として

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)}{r^4} - \frac{15(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n})}{r^4} \right] \mathbf{n} + \frac{3\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n}}{r^4} \mathbf{p}_1 + \frac{3\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{n}}{r^4} \mathbf{p}_2 \right\}$$

である。当然 $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = -\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$ である。