

## 第 2 回問題

## ① 1. 真空中の Maxwell 方程式

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{i}(\mathbf{x}, t), \quad (2)$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t), \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (4)$$

について、ベクトル解析の結果をもちいて、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  とスカラーポテンシャル  $\phi(\mathbf{x}, t)$  が導入できることを示せ。

2. Maxwell 方程式から  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  と  $\phi(\mathbf{x}, t)$  が満たす方程式を導け。

3. ベクトルポテンシャル、スカラーポテンシャルに、任意のスカラー関数  $u(\mathbf{x}, t)$  を使って

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \nabla u(\mathbf{x}, t), \quad \phi'(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (5)$$

としても  $\mathbf{A}'$  と  $\phi'$  からつくられる磁束密度と電場  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  が不変であることをしめせ。

4. ポテンシャル  $\mathbf{A}$  と  $\phi$  の方程式が波動方程式の形をとるためには、 $\mathbf{A}$  と  $\phi$  はどのような関係をみたす必要があるか？ その関係は  $u(\mathbf{x}, t)$  をどのように選べば良いか述べよ。

② 無限にひろがった 3 次元真空中に時間に依存しない電荷分布  $\rho(\mathbf{x})$  があるとき、Maxell 方程式から静電場  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  を Poisson 方程式の Green 関数を使って求めてみよう。

1. 静電場  $\mathbf{E}$  が従う方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \quad (6)$$

を静電ポテンシャル  $\phi(\mathbf{x})$  を用いて書換えると、Poisson 方程式

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \phi(\mathbf{x}) = -\frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \quad (7)$$

となることを示せ。

2. Poisson 方程式の Green 関数  $G(\mathbf{x})$  を次の式で定義する。

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x}) \quad (8)$$

このとき

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (9)$$

が Poisson 方程式 (7) の解になることを示せ。また、Green 関数の物理的意味を述べよ。

3. デルタ関数  $\delta(\mathbf{x})$  は Fourier 積分で

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad (10)$$

と与えられる。また Green 関数は

$$G(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad (11)$$

と表される。Green 関数の Fourier 変換  $\hat{G}(\mathbf{k})$  はどのように表されるか？

4. 波数ベクトル  $\mathbf{k}$  についての積分を実行し、Green 関数  $G(\mathbf{x})$  を求めよ (フーリエ積分の実行時には  $\mathbf{k}$  について極座標表示を用いて、最終的に留数定理を使うとよい)。

また静電ポテンシャル  $\phi(\mathbf{x})$  を電荷密度  $\rho(\mathbf{x})$  で表せ。さらに電場  $\mathbf{E}$  の表式も求めよ。

③ 定常な電荷分布  $\rho(\mathbf{x})$  があるとき、電荷分布が存在する場所から非常に遠い場所での静電場の漸近的な表現を考えよう。

1. 点  $\mathbf{r}$  での静電ポテンシャルは

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} d\mathbf{x} \quad (12)$$

である。ここで、電荷  $\rho(\mathbf{x})$  の分布する範囲がおおよそ  $|\mathbf{x}| < a$  にあるとする (位置ベクトル原点はこの範囲内にとる)。電荷分布から遠く離れた点  $\mathbf{r}$  ( $|\mathbf{r}| \gg a$ ) での静電ポテンシャルが

$$\phi(\mathbf{r}) = \varphi_0 + \varphi_1 \left( \frac{a}{|\mathbf{r}|} \right) + \varphi_2 \left( \frac{a}{|\mathbf{r}|} \right)^2 + \varphi_3 \left( \frac{a}{|\mathbf{r}|} \right)^3 + \dots \quad (13)$$

という  $a/|\mathbf{r}|$  のべき級数で表されると便利である (なぜか?)。この表式を詳しく見てみよう。ここで、 $r = |\mathbf{r}|$ ,  $x = |\mathbf{x}|$  として、 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{x} = rx \cos \theta$  とおき、式 (12) の被積分関数中の  $r$  が関係するところを  $x/r$  のべきで級数展開する。

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2 - 2rx \cos \theta}} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left( \frac{x}{r} \right)^l \quad (14)$$

最初の 3 項  $P_0(s)$ ,  $P_1(s)$ ,  $P_2(s)$  を求めよ。

2. 最低次の項  $l = 0$  があらわす静電ポテンシャル  $\phi_0(\mathbf{r})$  を求めよ。その物理的意味を述べよ。

3.  $l = 1$  があらわす静電ポテンシャル  $\phi_1(\mathbf{r})$  を求めよ。ただし、電気双極子能率  $p$

$$p = \int \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (15)$$

を用いよ。

4.  $l = 2$  があらわす静電ポテンシャル  $\phi_2(\mathbf{r})$  を求めよ。ただし、電気四重極子能率テンソル  $Q_{ij}$  の縮約和

$$Q = Q_{ij} n_i n_j = \int \left[ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) - \frac{1}{3} x^2 \right] \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (16)$$

を用いよ ( $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ ,  $Q_{ij} = \int (x_i x_j - \delta_{ij} x^2/3) \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ )。

- 4 静電場  $E$  から電気双極子  $p$  に働く力は  $F = (p \cdot \nabla)E = \nabla(p \cdot E)$  で与えられることを示せ。また相対位置  $r$  におかれた二つの双極子  $p_1, p_2$  の間の相互作用エネルギーおよび働く力を求めよ。