

第 1 回問題の解答

(平成 20 年 4 月 23 日版)

① 2 つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のベクトル積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は 3 階の擬テンソル ϵ_{ijk}

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{if } (ijk) \text{ is cyclic in } (x, y, z) \\ -1 & \text{if } (ijk) \text{ is anti-cyclic in } (x, y, z) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

を用いて、その i 成分が

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k \quad (1)$$

と表される (二重の添字は和をとるものとする、上の例では j と k について和をとる)。

1. 次の等式を証明せよ。

$$\epsilon_{ikl} \epsilon_{lmn} = \delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{km} \quad (2)$$

$$\epsilon_{ikl} \epsilon_{klm} = 2\delta_{im} \quad (3)$$

2. 上記の性質を用いて次の等式を証明せよ。

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (4)$$

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (5)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (6)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (7)$$

3. 任意のスカラー場 $\varphi(\mathbf{x})$ およびベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ は各々 $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ を満たすことを示せ。

【ベクトル解析】定義と上の問題を組み合わせれば出てくる。この完全反対称テンソル ϵ_{ijk} は Eddington's epsilon とか Levi-Civita density と呼ばれることがある。

1. 2 重に出てくる添字 l は和をとる約束であることに注意すると、

$$\epsilon_{ikl} \epsilon_{lmn} = \epsilon_{ik1} \epsilon_{1mn} + \epsilon_{ik2} \epsilon_{2mn} + \epsilon_{ik3} \epsilon_{3mn}$$

である。 $(i, k) = (1, 2)$ をこの式に代入して式 (2) の右辺と比べる。両者は任意の (m, n) に対して確かに等しい。これを他の (i, k) についても同様に繰り返す。

式 (3) は (2) を使えばよい。

$$\epsilon_{ikl} \epsilon_{klm} = -\epsilon_{ikl} \epsilon_{lkm} = -(\delta_{ik} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kk}) = -(\delta_{im} - \delta_{im} \delta_{kk})$$

となる。ここで 2 重の添字をもつ Kronecker のデルタは $\delta_{kk} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$ であることに注意すれば式 (3) を得る。

2. それぞれ成分形でかく。外積は ϵ_{ijk} をつかって表す。式 (4) は以下のとおり。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \partial_j (\epsilon_{jkl} A_k B_l) = B_l \epsilon_{jkl} (\partial_j A_k) + A_k \epsilon_{jkl} (\partial_j B_l) = B_l \epsilon_{ljk} (\partial_j A_k) - A_k \epsilon_{kjl} (\partial_j B_l) \\ &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}). \end{aligned}$$

式 (5) は右辺の i 成分を抜き出して変形し、左辺と一致することをしめす。

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}]_i \\
&= \epsilon_{ijk} A_j \epsilon_{klm} \partial_l B_m + \epsilon_{ijk} B_j \epsilon_{klm} \partial_l A_m + B_j \partial_j A_i + A_j \partial_j B_i \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} (A_j \partial_l B_m + B_j \partial_l A_m) + B_j \partial_j A_i + A_j \partial_j B_i \\
&= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) (A_j \partial_l B_m + B_j \partial_l A_m) + B_j \partial_j A_i + A_j \partial_j B_i \\
&= (A_j \partial_i B_j + B_j \partial_i A_j) - (A_j \partial_j B_i + B_j \partial_j A_i) + B_j \partial_j A_i + A_j \partial_j B_i \\
&= A_j \partial_i B_j + B_j \partial_i A_j = \partial_i (A_j B_j) = [\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})]_i.
\end{aligned}$$

式 (6) は次のとおり。

$$\begin{aligned}
[\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{klm} A_l B_m = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j A_l B_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j A_l B_m \\
&= \partial_j (A_i B_j) - \partial_j (A_j B_i) = A_i (\partial_j B_j) + B_j (\partial_j A_i) - A_j (\partial_j B_i) - B_i (\partial_j A_j) \\
&= [\mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}]_i.
\end{aligned}$$

式 (7) も次のとおり。

$$\begin{aligned}
[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{klm} \partial_l A_m = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j \partial_l A_m \\
&= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l A_m = \partial_i (\partial_j A_j) - \partial_j \partial_j A_i = [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}]_i.
\end{aligned}$$

3. (擬テンソルの反対称性より明らか) やはり ϵ_{ijk} をつかって成分でやると、前者は

$$[\nabla \times (\nabla \varphi)]_i = \epsilon_{ijk} \partial_j (\partial_k \varphi)$$

となるが、添字の j, k を入れ替えると同じ実体に対して負符号がつくので、0 である。むしろ、幾何的にみれると良い。 ∇ と「平行な」ベクトルどうしの外積はゼロになる。

後者も同様に

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \partial_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k = \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k$$

これも添字の i, j を入れ替えると同じ実体に対して負符号がつくので、実体は 0 である。幾何的には、 ∇ に「垂直な」ベクトル $\nabla \times \mathbf{A}$ と ∇ との内積はゼロになる、と見ることができる。

2) 以下のベクトルの発散および回転を求めよ。但し、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は一定ベクトルとし、 $|\mathbf{x}| = r$ とする。

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{b}, \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{x}, \quad \psi(r)(\mathbf{a} \times \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{x}).$$

【動系ベクトルを含む関数の発散と回転】

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{b}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\
 \nabla \times ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{b}) &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} \\
 \nabla \cdot ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}) &= 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \\
 \nabla \times ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}) &= \mathbf{a} \times \mathbf{x} \\
 \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) &= 0 \\
 \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) &= 2\mathbf{a} \\
 \nabla \cdot (\psi(r)(\mathbf{a} \times \mathbf{x})) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) \cdot \nabla \psi(r) = (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) \cdot (\nabla r) \left(\frac{d\psi(r)}{dr} \right) = 0 \\
 \nabla \times (\psi(r)(\mathbf{a} \times \mathbf{x})) &= 2\mathbf{a}\psi(r) + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} (\mathbf{x} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{x})) \\
 &= 2\mathbf{a}\psi(r) + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} [\mathbf{a}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) - r(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})] \\
 \nabla \cdot (\mathbf{x} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{x})) &= -2\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \\
 \nabla \times (\mathbf{x} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{x})) &= -3\mathbf{a} \times \mathbf{x}
 \end{aligned}$$

③ (ガウスの発散定理、ストークスの定理)

ベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が与えられたとき、任意の 3 次元領域 V について

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) dV = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{x}) dV = \int_{\partial V} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (8)$$

がなりたつ (ガウスの発散定理)。ここで ∂V は V の境界面であり、 $\mathbf{n}$ は境界面の面要素の法線ベクトルで V の外側に向かう。また、任意の曲面 S について

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (9)$$

である (ストークスの定理)。ここで ∂S は曲面 S がつくる境界線であり、 $d\mathbf{r}$ は曲線 ∂S にそった接線方向のベクトルである。

以上の 2 定理の少し異った形を証明しよう。

1. ガウスの発散定理に関連して次の式が成り立つことを示せ。(V は領域で、 S は V がつくる境界面である。)

$$(a) \int_V \nabla \varphi(\mathbf{x}) dV = \int_S \varphi \mathbf{n} dS$$

$$(b) \int_V \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) dV = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS$$

(ヒント：(a) 定ベクトル $\mathbf{B}$ をはさんで $\int_V \nabla(\varphi(\mathbf{x})\mathbf{B}) dV$ にガウスの発散定理を使う。(b) やはり定ベクトル $\mathbf{B}$ をはさんで、 $\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x})) = -\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A})$ を使え。)

2. ストークスの定理に関連して次の式が成り立つことを示せ。(C は閉曲線で、 S は C がつくる曲面である。)

$$(a) \int_C \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{r} = \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \varphi dS$$

$$(b) \int_C d\mathbf{r} \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{A} dS$$

1. (a) $\mathbf{B}$ を定ベクトルとして $\varphi(\mathbf{x})\mathbf{B}$ に発散定理をつかう。 $\mathbf{B} \cdot \int_V \nabla \varphi(\mathbf{x}) dV = \int_V \nabla(\varphi \mathbf{B}) dV = \int_S \varphi \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{B} \cdot \int_S \varphi \mathbf{n} dS$ この式が任意の定ベクトルについて成立するので証明できた。
- (b) $\mathbf{B} \cdot \int_V (\nabla \times \mathbf{A}) dV = - \int_V \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) dV = - \int_S (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{B} \cdot \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) dS$
2. (a) $\mathbf{B} \cdot \int_C \varphi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C \varphi \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \int_S [\nabla \times (\varphi \mathbf{B})] \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{B} \cdot \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \varphi dS$
最後の等式は $\epsilon_{ijk} \partial_j (\varphi B_k) n_i = B_k \epsilon_{kij} n_i \partial_j \varphi$ を使った。
- (b) $\mathbf{B} \cdot (d\mathbf{r} \times \mathbf{A}) = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{r}$ より $\mathbf{B} \cdot \int_C d\mathbf{r} \times \mathbf{A} = - \int_C (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) d\mathbf{r} = - \int_S [\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A})] \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{B} \cdot \int_S [(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{A}] dS$
最後の等式は $\epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{klm} B_l A_m n_i = -C_l \epsilon_{lkm} (\epsilon_{kij} n_i \partial_j) A_m$ をつかった。

④ 空間を 3 次元とすると、 $\nabla \cdot \mathbf{r}$, $\nabla \times \mathbf{r}$, ∇r , $\nabla \left(\frac{1}{r}\right)$, $\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right)$ を求めよ。ただし、 $\mathbf{r}$ は位置ベクトル、 $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である。また、 $\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right)$ を半径 R の球で体積積分せよ。

【位置ベクトル・動系の発散と回転】

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{r} &= 3 \\ \nabla \times \mathbf{r} &= 0 \\ \nabla r &= \frac{\mathbf{r}}{r} \\ \nabla \frac{1}{r} &= -\frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \\ \nabla^2 \frac{1}{r} &= 0 \quad (r \neq 0) \end{aligned}$$

となる。

また、ガウスの発散定理を用いて $\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right)$ の積分を求める。

$$\begin{aligned} \int_{\text{半径 } R \text{ の球}} \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) d^3x &= \int \nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{r}\right) d^3x = \int_{\text{半径 } R \text{ の球面}} \mathbf{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r}\right) da = \int -\frac{1}{R^2} R^2 d\Omega \\ &= -4\pi \end{aligned}$$

ここで $d\Omega$ は立体角要素 $d\Omega = \sin \theta d\varphi d\theta$ 。以上から、実は $\nabla^2 r^{-1} = -4\pi \delta(\mathbf{r})$ であることがわかる。

⑤ (曲線座標系での体積要素)

1. 円柱座標 (ρ, φ, z) で体積要素 $dV = dx dy dz$ を表し、その図形的意味をのべよ。(デカルト座標との関係は $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$ である。)
2. 3 次元極座標 (r, θ, φ) で体積要素 dV を表し、その図形的意味をのべよ。(デカルト座標との関係は $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$ である。)

変数変換のヤコビ行列式を計算してもらおう。ヤコビ行列式については図を書いて感覚的にも理解してほしい。

1.

$$dV = dx dy dz = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} d\rho d\varphi dz = \begin{vmatrix} \partial_\rho x & \partial_\rho y & \partial_\rho z \\ \partial_\varphi x & \partial_\varphi y & \partial_\varphi z \\ \partial_z x & \partial_z y & \partial_z z \end{vmatrix} d\rho d\varphi dz = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} d\rho d\varphi dz = \rho d\rho d\varphi dz$$

2.

$$dV = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} dr d\theta d\varphi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

