

第 12 回問題の解答

(平成 20 年 7 月 20 日版)

① 質量 m_1 の粒子が全エネルギー E_{lab} 、運動量 P_{lab} で実験室系で静止している質量 m_2 の粒子と衝突したとき

1. この衝突の重心系での全エネルギー E_{CM} をもとめなさい。(不変量を用いよ。ただし重心系とはこの二つの粒子の運動量の重心である。)
2. 重心系での運動量の大きさを求めなさい。
3. 実験室系と重心系の間の Lorentz 変換のパラメーターである、実験室系に対する重心系の β と γ を求めなさい。

不変量 $M^2 = E^2 - p^2 c^2$ を比較する。重心系では運動量の和はゼロより、

$$\begin{aligned} E_{\text{CM}}^2 - 0^2 &= (E_{\text{lab}} + m_2 c^2)^2 - (E_{\text{lab}}^2 - (m_1 c^2)^2) \\ &= (m_1 c^2)^2 + (m_2 c^2)^2 + 2m_2 c^2 E_{\text{lab}} \end{aligned}$$

$$E_{\text{CM}} = \sqrt{(m_1 c^2)^2 + (m_2 c^2)^2 + 2m_2 c^2 E_{\text{lab}}} \quad \dots 1$$

実験室系での粒子 1, 2 の全エネルギーをそれぞれ E_1, E_2 、運動量を p_1, p_2 とすると、全体としての運動の β は $\beta = (p_1 + p_2)/(E_1 + E_2)$ と書けるので、

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{P_{\text{lab}} c}{E_{\text{lab}} + m_2 c^2} \\ \gamma &= \frac{E_{\text{lab}} + m_2 c^2}{E_{\text{CM}}} \quad \dots 3 \end{aligned}$$

重心系での運動量は Lorentz 変換より

$$P c = \beta \gamma E_2 = \frac{P_{\text{lab}} m_2 c^2}{E_{\text{CM}}} \quad \dots 2$$

② 真空中の電磁場のポテンシャルに対する偏微分方程式

$$\left(\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \left(\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) = -\mu_0 \mathbf{i}, \quad (1)$$

は次のようなラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ から導かれることをしめせ

$$\mathcal{L} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2\mu_0} |\nabla \times \mathbf{A}|^2 - \rho \phi + \mathbf{i} \cdot \mathbf{A}. \quad (2)$$

最小作用の原理をベタにやってみる。この場合の作用積分 S は両ポテンシャルの汎関数として $S[\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}, t)] = \int dt d^3x \mathcal{L}$ で与えられる。ここでは形式的に電荷密度 $\rho(\mathbf{x}, t)$ と電流密度 $\mathbf{i}(\mathbf{x}, t)$ が所与のものとして、ポテンシャルの変分 $\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}$, $\phi + \delta \phi$ をとり $\mathcal{L}$ の第一変分の停留点を求める。変分 $\delta \mathbf{A}$, $\delta \phi$ は時間、空間の両境

界でゼロになるようにとるものとする。

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \mathcal{L}(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, \phi + \delta\phi) - \mathcal{L}(\mathbf{A}, \phi) \\
&= \frac{\epsilon_0}{2} [-\nabla(\phi + \delta\phi) - \partial_t(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})]^2 - \frac{1}{2\mu_0} |\nabla \times (\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})|^2 - \rho(\phi + \delta\phi) + \mathbf{i} \cdot (\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}) \\
&\quad - \left[\frac{\epsilon_0}{2} (-\nabla\phi - \partial_t\mathbf{A})^2 - \frac{1}{2\mu_0} |\nabla \times \mathbf{A}|^2 - \rho\phi + \mathbf{i} \cdot \mathbf{A} \right] \\
&\simeq \epsilon_0(\nabla\phi + \partial_t\mathbf{A}) \cdot (\nabla\delta\phi) - \rho\delta\phi + \epsilon_0(\nabla\phi + \partial_t\mathbf{A}) \cdot (\partial_t\delta\mathbf{A}) - \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A}) \times (\nabla \times \delta\mathbf{A}) + \mathbf{i} \cdot \delta\mathbf{A}
\end{aligned}$$

最後の記号 $\simeq$ より右辺では変分についての一次の項のみを拾い上げた。あとは時間、空間について部分積分を施して変分を括りだせばよい。

$$\begin{aligned}
\epsilon_0(\nabla\phi + \partial_t\mathbf{A}) \cdot (\nabla\delta\phi) &= \epsilon_0 \nabla \cdot [(\nabla\phi + \partial_t\mathbf{A})\delta\phi] - \epsilon_0[\nabla^2\phi + \partial_t(\nabla \cdot \mathbf{A})]\delta\phi, \\
\epsilon_0(\nabla\phi + \partial_t\mathbf{A}) \cdot (\partial_t\delta\mathbf{A}) &= \epsilon_0 \partial_t [(\nabla\phi + \partial_t\mathbf{A}) \cdot \delta\mathbf{A}] - \epsilon_0[\partial_t(\nabla\phi + \partial_t\mathbf{A})] \cdot \delta\mathbf{A}, \\
-\frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{A}) \times (\nabla \times \delta\mathbf{A}) &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot [(\nabla \times \mathbf{A}) \times \delta\mathbf{A}] - \frac{1}{\mu_0} [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})] \cdot \delta\mathbf{A}
\end{aligned}$$

時間空間の境界で変分はゼロであることから、上記 3 式の右辺第一項はそれぞれゼロになる。したがって、

$$\delta\mathcal{L} \simeq - \left\{ \epsilon_0[\nabla^2\phi + \partial_t(\nabla \cdot \mathbf{A})] + \rho \right\} \delta\phi + \left\{ -\epsilon_0\partial_t(\nabla\phi + \partial_t\mathbf{A}) - \frac{1}{\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{i} \right\} \cdot \delta\mathbf{A}$$

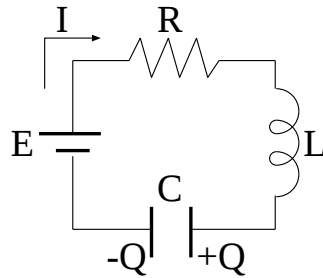
であるので、停留点では

$$\begin{aligned}
\epsilon_0[\nabla^2\phi + \partial_t(\nabla \cdot \mathbf{A})] + \rho &= 0, \\
-\epsilon_0\partial_t(\nabla\phi + \partial_t\mathbf{A}) - \frac{1}{\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{i} &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

となる。この 2 式は Maxwell 方程式のガウスの法則とアンペールマックスウェルの法則に対応することが見て取れる。ローレンツゲージ $\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial_t\phi/c^2 = 0$ を使うことで与えられた波動方程式に帰着する。

3 (Van der Pol oscillator)

- 図の LCR 回路を流れる電流をもとめよ。ただし $E = \text{const.}$, $Q(t=0) = Q_0$, $I(t=0) = 0$ とする。



- 抵抗 R を $V(I) = \alpha I(I^2 - \beta)$ という特性をもつ素子に置き換える。定性的に電流が小さいときは電圧をあげ、電流が大きいたまは電圧を下げる向きに働くことになる。

- $E = 0$ としたときの電流の式をかけ
- 上の結果に現れるパラメータの値を適当に選び、

$$\ddot{I} + \epsilon(I^2 - 1)\dot{I} + I = 0 \tag{3}$$

になるようにする。ここで $\epsilon = \frac{3\alpha}{L} \ll 1$ として $\epsilon = 0$ のときの解 $I(t) = Ae^{it} + A^*e^{-it}$ からのずれを考察する。(ここで A^* は A の複素共役である。)

- i. 振幅 A を時刻 t の関数 $A(t)$ とみなして式 (3) に代入しよう。ここで、 $A(t)$ の時間変化 dA/dt は十分小さく、 dA/dt のオーダーは ϵ であるとする。さらに $d^2A/dt^2 = 0$ とみなし、 e^{it} の項を ϵ についてまとめると

$$2i\dot{A} + A(2|A| - 1)i = 0 \quad (4)$$

となることを示せ。

- ii. 式 (4) を解き、 $\epsilon \neq 0$ の解 $I(t) = A(t)e^{it} + A^*(t)e^{-it}$ の振舞いについて述べよ。(ヒント: $A(t) = R(t)e^{i\theta(t)}$ とおき、 $R(t)$ と $\theta(t)$ の式を解く。)

極限周期軌道への近付き方。摂動の問題は多重尺度法展開をもちいると完全にシステマティックにできる。

- $I(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\lambda_2 Q_0 - I_0)e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}(-\lambda_1 Q_0 + I_0)e^{\lambda_2 t}$, $\lambda = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$. 特に重根のときは $I(t) = [t(I_0 - Q_0)/\lambda + Q_0]e^{\lambda t}$.
- (a) $L d^2I/dt^2 + \alpha(3I^2 - \beta)dI/dt + I/C = 0$
 (b) i. e^{2it} などの項も出てくるが、これらは ϵ^2 などのオーダーを考慮することで初めて解決する。
 ii. $I(t) = \sqrt{\frac{R_0^2}{2R_0 + (1-2R_0^2)e^{-\epsilon t}}} e^{i(t+\theta_0)} + c.c.$

4 (ステルマー (Störmer) 問題)

地球が作る磁場に入射する荷電粒子の軌道を考えよう。

- 地球がつくる磁場を近似的に磁気双極子 M がつくるものとみなすとき、荷電粒子 (質量 m 、電荷 q) のラグランジアンを書け。ただし、電場の影響は無視し、地球は原点にあるものとする。
- 磁気双極子 M の方向を z 軸の方向にとり、 $M = M\hat{z}$ とおく。粒子の位置を円柱座標 (ρ, θ, z) で表すとき、ラグランジアンはこの変数でどうかけるか。
- オイラーラグランジュ方程式から、 ρ, θ, z についての方程式をみちびけ。
- 赤道面から粒子が入射する極限を考えよう。($z = 0$ としてよい。)

(a) このとき粒子の運動は ρ の運動方程式からきまる。 θ に共役な運動量 $p_\theta = \partial L / \partial \dot{\theta}$ をもちいてポテンシャルを求め、運動の概略を論ぜよ。

(b) θ に共役な運動量 p_θ と運動エネルギー $E = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2)$ が保存量になることに注意して粒子の軌道の積分表現を求めよ。

(ヒント: p_θ の式から $\dot{\theta}$ を求めて E の式に代入し、 ρ だけの式をつくる。次に $\dot{\theta}$ の表現を変形して $dt = [\dots]d\theta$ とする。これを $d\rho/dt$ の dt に代入し $d\rho/d\theta$ の表現を得よ。これを $\int d\theta = \int [\dots]d\rho$ と書き直せばよい。)

- $L = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 + q\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$.
- $L(\dot{\rho}, \dot{\theta}, \dot{z}, \rho, \theta, z) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{qM\rho^2\dot{\theta}}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$

$$3. \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0 \text{ より } m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\theta}^2 = \frac{2qM\rho\dot{\theta}}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3qM\rho^3\dot{\theta}}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}.$$

$$m\rho^2\dot{\theta} + \frac{qM\rho^2}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = \text{const.} \equiv p_\theta.$$

$$m\ddot{z} = -\frac{3qm\rho^2\dot{\theta}z}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}.$$

4. (a) $m\ddot{\rho} = \frac{1}{m\rho^3} \left(p_\theta - \frac{qM}{\rho} \right) \left(p_\theta - \frac{2qM}{\rho} \right) = -\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{2m\rho^2} \left(p_\theta - \frac{qM}{\rho} \right)^2$. ポテンシャルは $V(\rho) = \frac{1}{2m\rho^2} \left(p_\theta - \frac{qM}{\rho} \right)^2$ であたえられる。運動の概略は、 $V(\rho)$ を図示すればあきらかになる。(i) $p_\theta > 0$ のとき: 常に反発力となる。つまり入射した荷電粒子は磁気双極子に吹き飛ばされる。(ii) $p_\theta > 0$ のとき: ρ が小さいところと大きいところでは反発力となるが、 $qM/p_\theta < \rho < 2qM/p_\theta$ では引力となる。入射のエネルギー E が $V_{\max} = V(2qM/p_\theta)$ より高いときは原点近くまでやってきて散乱される。 $E < V_{\max}$ のときは適当な場所から入射すると粒子がトラップされることになる。 $E = V_{\max}$ のときは、 $\rho = 2qM/p_\theta$ の点が特異点になりこの点に到達するまでに無限の時間がかかる。
- (b) $\dot{\theta} = \frac{1}{m\rho^2} \left(p_\theta - \frac{qM}{\rho} \right)$ より $\dot{\rho}^2 = 2E/m - \frac{1}{m\rho^2} \left(p_\theta - \frac{qM}{\rho} \right)^2$ となる。 $dt = m\rho^2/(p_\theta - qM/\rho)d\theta$ より、 $\int d\rho \frac{(p_\theta - qM/\rho)/(m\rho^2)}{\sqrt{2E/m - (p_\theta - qM/\rho)^2/(m^2\rho^2)}} = \pm \int d\theta$.