

第 12 回問題

- ① 質量 m_1 の粒子が全エネルギー E_{lab} 、運動量 P_{lab} で実験室系で静止している質量 m_2 の粒子と衝突したとき

1. この衝突の重心系での全エネルギー E_{CM} をもとめなさい。(不変量を用いよ。ただし重心系とはこの二つの粒子の運動量の重心である。)
2. 重心系での運動量の大きさを求めなさい。
3. 実験室系と重心系の間の Lorentz 変換のパラメーターである、実験室系に対する重心系の β と γ を求めなさい。

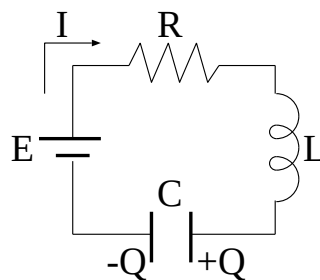
- ② 真空中の電磁場のポテンシャルに対する偏微分方程式

$$\left(\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \left(\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) = -\mu_0 \mathbf{j}, \quad (1)$$

は次のようなラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ から導かれることをしめせ

$$\mathcal{L} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2\mu_0} |\nabla \times \mathbf{A}|^2 - \rho \phi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}. \quad (2)$$

- ③ 1. 図の LCR 回路を流れる電流をもとめよ。ただし $E = \text{const.}$, $Q(t=0) = Q_0$, $I(t=0) =$



0 とする。

2. 抵抗 R を $V(I) = \alpha I(I^2 - \beta)$ という特性をもつ素子に置き換える。定性的に電流が小さいときは電圧をあげ、電流が大きいときには電圧を下げる向きに働くことになる。

(a) $E = 0$ としたときの電流の式をかけ

(b) 上の結果に現れるパラメータの値を適当に選び、

$$\ddot{I} + \epsilon(I^2 - 1)\dot{I} + I = 0 \quad (3)$$

になるようにする。ここで $\epsilon = \frac{3\alpha}{L} \ll 1$ として $\epsilon = 0$ のときの解 $I(t) = Ae^{it} + A^*e^{-it}$ からのずれを考察する。(ここで A^* は A の複素共役である。)

- i. 振幅 A を時刻 t の関数 $A(t)$ とみなして式 (3) に代入しよう。ここで、 $A(t)$ の時間変化 dA/dt は十分小さく、 dA/dt のオーダーは ϵ であるとする。さらに $d^2A/dt^2 = 0$ とみなし、 e^{it} の項を ϵ についてまとめると

$$2i\dot{A} + A(2|A| - 1)i = 0 \quad (4)$$

となることを示せ。

- ii. 式 (4) を解き、 $\epsilon \neq 0$ の解 $I(t) = A(t)e^{it} + A^*(t)e^{-it}$ の振舞いについて述べよ。
(ヒント: $A(t) = R(t)e^{i\theta(t)}$ とおき、 $R(t)$ と $\theta(t)$ の式を解く。)

4 地球が作る磁場に入射する荷電粒子の軌道を考えよう。

1. 地球がつくる磁場を近似的に磁気双極子 $\mathbf{M}$ がつくるものとみなすとき、荷電粒子 (質量 m 、電荷 q) のラグランジアンを書け。ただし、電場の影響は無視し、地球は原点にあるものとする。
2. 磁気双極子 $\mathbf{M}$ の方向を z 軸の方向にとり、 $\mathbf{M} = M\hat{z}$ とおく。粒子の位置を円柱座標 (ρ, θ, z) で表すとき、ラグランジアンはこの変数でどうかけるか。
3. オイラーラグランジュ方程式から、 ρ, θ, z についての方程式をみちびけ。
4. 赤道面から粒子が入射する極限を考えよう。($z = 0$ としてよい。)
 - (a) このとき粒子の運動は ρ の運動方程式からきまる。 θ に共役な運動量 $p_\theta = \partial L / \partial \dot{\theta}$ をもちいてポテンシャルを求め、運動の概略を論ぜよ。
 - (b) θ に共役な運動量 p_θ と運動エネルギー $E = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2)$ が保存量になることに注意して粒子の軌道の積分表現を求めよ。
(ヒント: p_θ の式から $\dot{\theta}$ を求めて E の式に代入し、 $\dot{\rho}$ だけの式をつくる。次に $\dot{\theta}$ の表現を変形して $dt = [\dots]d\theta$ とする。これを $d\rho/dt$ の dt に代入し $d\rho/d\theta$ の表現を得よ。これを $\int d\theta = \int [\dots]d\rho$ と書き直せばよい。)