第 11 回問題の解答

(平成 20 年 7 月 18 日版)

$\boxed{1}$ 同じ方向で連続して v_1, v_2 の相対速度で行う特殊 Lorentz 変換は、速度 v での一回の Lorentz 変換でかけることを示せ。またそのときの v を求め、これが光速をこえられないことをしめせ。また光速の粒子があるときこれに Lorentz 変換をおこなっても光速をこえられないことを確かめよ。

$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ を x 軸にとる。

$$\beta_1 = \frac{v_1}{c}\,, \qquad \beta_2 = \frac{v_2}{c}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\,, \qquad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}}$$

とおくと、v_1, v_2 による Lorentz 変換はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}_i \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_i = \begin{pmatrix} \gamma_i & -\beta_i\gamma_i \\ -\beta_i\gamma_i & \gamma_i \end{pmatrix} \qquad (i = 1, 2)$$

v_1, v_2 による Lorentz 変換を続けて行なうと、

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1 \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1 &= \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\beta_2\gamma_2 \\ -\beta_2\gamma_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\beta_1\gamma_1 \\ -\beta_1\gamma_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2) & -(\beta_1+\beta_2)\gamma_1\gamma_2 \\ -(\beta_1+\beta_2)\gamma_1\gamma_2 & \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\right)^2}} & -\dfrac{\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\right)^2}} \\ -\dfrac{\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\right)^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\right)^2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\beta = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\,, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

である。よって、v_1, v_2 による Lorentz 変換の積は

$$v = \frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2/c^2}$$

による一回の Lorentz 変換で書ける。

また、

$$|\beta_1|, |\beta_2| \le 1$$

のとき、

$$
\begin{aligned}
(1+\beta_1\beta_2)^2-(\beta_1+\beta_2)^2 &= (1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2) \\
&\geq 1
\end{aligned}
$$

より、

$$
|\beta| = \left|\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\right| \leq 1
$$

よって、光速以下の速度で Lorentz 変換を繰り返しても光速を超えられない。

特に

$$
\beta_1 = 1
$$

のとき、

$$
\beta = \frac{1+\beta_2}{1+\beta_2} = 1
$$

となるので、光速の粒子に Lorentz 変換を行なっても光速を超えられない。

$\boxed{2}$ 慣性系 K' が別の慣性系 K に対して相対速度 $\boldsymbol{v}$ で運動しており、慣性系 K' に速度が $\boldsymbol{u}'$、加速度が $\boldsymbol{a}'$ の粒子があるとする。加速度にたいする Lorentz 変換則を $\boldsymbol{v}$ に対して平行および直角方向の成分にわけて求めなさい。

相対運動 $\boldsymbol{v}$ が K', K の x 軸上になるように両慣性系を決める。粒子の座標を K' 上で $(t',\, X'(t'),\, Y'(t'),\, Z'(t'))$、K 上で $(t,\, X(t),\, Y(t),\, Z(t))$ とおくと両者の関係は

$$
X'(t') = \frac{X(t)-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad Y'(t') = Y(t), \quad Z'(t') = Z(t)t' = \frac{t-X(t)v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},
$$

となる。ここで $\beta = v/c$ である。さて K 上での粒子の速度 $\boldsymbol{u}(t) = (U(t),\, V(t),\, W(t)) = (dX(t)/dt,\, dY(t)/dt,\, dZ(t)/dt)$ と K' 上での速度 $\boldsymbol{u}'(t') = (U'(t'),\, V'(t'),\, W'(t')) = (dX'(t')/dt',\, dY(t')/dt',\, dZ(t')/dt')$ の関係は

$$
\begin{aligned}
U'(t') &= \frac{dX'(t')}{dt'} = \frac{d}{dt}\left(\frac{X(t)-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\frac{dt'}{dt} = \frac{U(t)-v}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-U(t)v/c^2} = \frac{U(t)-v}{1-U(t)v/c^2}, \\
V'(t') &= \frac{dY'(t')}{dt'} = \frac{dY(t)}{dt}\frac{dt'}{dt} = V(t)\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-U(t)v/c^2}, \\
W'(t') &= \frac{dW'(t')}{dt'} = \frac{dW(t)}{dt}\frac{dt'}{dt} = W(t)\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-U(t)v/c^2}
\end{aligned}
$$

で与えられる。時間微分をもう一度行って K 系での粒子の加速度 $\boldsymbol{a}(t) = (A(t),\, B(t),\, C(t)) = (dU(t)/dt,\, dV(t)/dt,\, dW(t)/dt)$ と K' 系のもの $\boldsymbol{a}'(t') = (A'(t'),\, B'(t'),\, C'(t')) = (dU'(t')/dt',\, dV'(t')/dt',\, dW'(t')/dt')$ を同様に導けばよい。

$$
\begin{aligned}
A'(t') &= \frac{dU'(t')}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{d}{dt}\left(\frac{U(t)-v}{1-U(t)v/c^2}\right)\frac{dt'}{dt} = A(t)\frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{(1-U(t)v/c^2)^3}, \\
B'(t') &= \frac{dV'(t')}{dt}\frac{dt}{dt'} = \left[B(t)\left(1-\frac{U(t)v}{c^2}\right) - A(t)\frac{V(t)v}{c^2}\right]\frac{1-\beta^2}{(1-U(t)v/c^2)^3}, \\
C'(t') &= \left[C(t)\left(1-\frac{U(t)v}{c^2}\right) - A(t)\frac{W(t)v}{c^2}\right]\frac{1-\beta^2}{(1-U(t)v/c^2)^3}
\end{aligned}
$$

つまり、加速度の $\boldsymbol{v}$ に平行な成分 $a'_{\parallel}(t')$ と垂直な成分 $a'_{\perp}(t')$ は

$$
\begin{aligned}
a'_{\parallel}(t') &= a_{\parallel}(t)\frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{(1-u_{\parallel}(t)v/c^2)} = a_{\parallel}(t)\frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{(1-\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}/c^2)^3}, \\
a'_{\perp}(t') &= \left[a_{\perp}(t)\left(1-\frac{u_{\parallel}(t)v}{c^2}\right) - u_{\perp}(t)\frac{a_{\parallel}(t)v}{c^2}\right]\frac{1-\beta^2}{(1-\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}/c^2)^3}, \\
&= \left[a_{\perp}(t)\left(1-\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}\right) - u_{\perp}(t)\frac{\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}\right]\frac{1-\beta^2}{(1-\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}/c^2)^3}
\end{aligned}
$$

の変換則で与えられる。

$\boxed{3}$ 等速度運動をする点電荷のつくる電磁場を、ある慣性系 K' に点電荷が静止しているとして、この系に対して速度 v で x 方向に運動している慣性系 K への特殊 Lorentz 変換によって求めなさい。

Lorentz 変換は四元座標 $x^{\mu} \equiv (ct, \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ を用いると、

$$
x^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix} x'^{\mu},
$$

と書ける。ここで $\beta \equiv v/c$,$\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$ である。すると、微分 $\partial_{\mu} \equiv (\partial/(c\partial t), (\partial/\partial\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ と四元ポテンシャル $A_{\mu} \equiv (\phi/c, -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ は共変ベクトルで

$$
\partial_{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & & \\ \beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix} \partial'_{\mu}, \qquad A_{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & & \\ \beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix} A'_{\mu},
$$

のように変換する。これらを用いて電場 E_1 を Lorentz 変換すると、

$$
\begin{aligned}
E_1 &= c(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0) \\
&= c(\gamma\partial'_0 + \beta\gamma\partial'_1)(\gamma A'_1 + \beta\gamma A'_0) - c(\gamma\partial'_1 + \beta\gamma\partial'_0)(\gamma A'_0 + \beta\gamma A'_1) \\
&= c\gamma^2(1-\beta^2)(\partial'_0 A'_1 - \partial'_1 A'_0) = E'_1,
\end{aligned}
$$

となる。他も同様に変換すると以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{\perp} &= \gamma(\boldsymbol{E}'_{\perp} + \boldsymbol{\beta}\times c\boldsymbol{B}'), & \boldsymbol{E}_{\parallel} &= \boldsymbol{E}'_{\parallel}, \\
c\boldsymbol{B}_{\perp} &= \gamma(c\boldsymbol{B}'_{\perp} - \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}'), & \boldsymbol{B}_{\parallel} &= \boldsymbol{B}'_{\parallel}.
\end{aligned}
$$

ここで、$\boldsymbol{\beta} = \beta\hat{\boldsymbol{x}}$ であり、$_{\perp,\parallel}$ はそれぞれ $\boldsymbol{\beta}$ に対して垂直、平行方向である。今、点電荷の持つ電荷を q とすると、K' 系での電場と磁場は

$$
\boldsymbol{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r'^3}\boldsymbol{r}', \qquad \boldsymbol{B}' = 0,
$$

となるので、求める K 系での電場と磁場は以下のようになる。

$$
\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\gamma}{r'^3}(\boldsymbol{r} + vt\hat{\boldsymbol{x}}), \qquad \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\gamma vt}{r'^3}\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{x}}.
$$

ただし、$r' = (\gamma^2(x+vt)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ である。

$\boxed{4}$ 素粒子などの粒子の静止系での崩壊確率は平均寿命を τ として次のような時間の関数となる。

$$P = P_0 \exp(-t/\tau) \tag{1}$$

1. この粒子が速度 $\beta(= v/c)$ で運動しているときは、その崩壊確率はどうなるか？
2. π 中間子は muon と neutrino に崩壊する。それぞれの質量を m_π, m_μ, m_ν としたとき、静止した π 中間子が崩壊したときの muon と neutrino の運動量を求めよ。
3. π 中間子が速度 β で運動しているとき、π 中間子が崩壊し、π 中間子の系で運動方向に対して角度 θ で muon が放出されたとき、実験室系 (観測者の系) での muon と neutrino の方向と運動量の大きさ、および muon の運動エネルギーを求めよ。
4. π 中間子の平均寿命は 2.6×10^{-8} 秒である。π 中間子が 1GeV/c の運動量をもつときの平均寿命を求めよ。

1. 運動方向を x 方向とする。重心系を K', 実験室系を K とする。Lorentz 変換は四元座標 $x^\mu \equiv (ct, \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ を用いると、

$$x^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & & \\ \beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix} x'^\mu,$$

と書ける。ここで $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$ である。粒子が重心系の原点に静止しているとすると、重心系での崩壊確率は $P_0 \exp(-t'/\tau)$ である。また上の逆変換より

$$t' = \gamma t - \beta\gamma x/c$$

である。今、重心系の原点と実験室系の原点が $t = t' = 0$ で一致したとすると、重心系の座標は実験室系において $x = c\beta t$ で運動している。よって、実験室系での崩壊確率は以下のようになる。

$$P_0 \exp(-t/(\tau\gamma))$$

2. muon と neutrino の運動量をそれぞれ p'_μ, p'_ν とおく。エネルギー保存則と運動量保存則はそれぞれ

$$\begin{aligned} m_\pi c^2 &= \sqrt{(m_\mu c^2)^2 + (p'_\mu c)^2} + \sqrt{(m_\nu c^2)^2 + (p'_\nu c)^2} \\ 0 &= p'_\mu + p'_\nu \end{aligned}$$

となる。これより運動量は以下のようになる。

$$\begin{aligned} p'_\mu c &= \sqrt{\left(\frac{m_\pi^2 + m_\mu^2 - m_\nu^2}{2m_\pi} c^2\right)^2 - (m_\mu c^2)^2} \\ p'_\nu c &= \sqrt{\left(\frac{m_\pi^2 + m_\nu^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c^2\right)^2 - (m_\nu c^2)^2} \end{aligned}$$

3. 速度

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v'_x = \frac{dx'}{dt'}$$

を用いると v と v' の関係は

$$v_x = \frac{v'_x + \beta}{1 + \beta v'_x}$$

となる。重心系での muon の放出される角度は $\cos\theta = v'_x/v$ であり、実験室系での運動方向に対する角度を ϕ_μ とすると以下のようになる。

$$\cos\phi_\mu = \frac{\cos\theta + \beta}{1 + \beta\cos\theta}$$

重心系での neutrino の放出される角度は $\theta + \pi$ より、実験室系での neutrino の放出される角度 ϕ_ν は

$$\cos\phi_\nu = \frac{-\cos\theta + \beta}{1 - \beta\cos\theta}$$

となる。また実験室系での運動量を p_μ, p_ν、エネルギーを $E^2 \equiv (mc^2)^2 + (pc)^2$ とすると、Lorentz 変換より

$$\begin{pmatrix} E_\mu \\ p_{\mu,x}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E'_\mu \\ p'_{\mu,x}c \end{pmatrix}$$
$$p_{\mu,y,z}c = p'_{\mu,y,z}c$$

よって実験室系での muon の運動量は

$$\begin{aligned} p_\mu^2 c^2 &= \gamma^2 \left(\beta\sqrt{(m_\mu c^2)^2 + (p'_\mu c)^2} + p'_\mu c\cos\theta\right)^2 + p'^2_\mu c^2 \sin^2\theta \\ &= \gamma^2 \left(\beta\frac{m_\pi^2 + m_\mu^2 - m_\nu^2}{2m_\pi}c^2 + p'_\mu c\cos\theta\right)^2 + p'^2_\mu c^2 \sin^2\theta \end{aligned}$$

同様に neutrino の運動量は

$$p_\nu^2 c^2 = \gamma^2 \left(\beta\sqrt{(m_\nu c^2)^2 + (p'_\nu c)^2} + p'_\nu c\cos\theta\right)^2 + p'^2_\nu c^2 \sin^2\theta$$

となる。また、muon の運動エネルギーは

$$E_\mu - m_\mu c^2 = \gamma\frac{m_\pi^2 + m_\mu^2 - m_\nu^2}{2m_\pi}c^2 + \gamma\beta p'_\mu c\cos\theta - m_\mu c^2$$

4. pion の質量 $m_\pi c^2 \sim 1.4 \times 10^2$MeV と

$$\beta = pc/E = \frac{pc}{\sqrt{(m_\pi c^2)^2 + (pc)^2}}$$

を用いると、寿命は

$$\begin{aligned} \tau/\sqrt{1-\beta^2} &\sim 2.6 \times 10^{-8} \times \sqrt{(10^3)^2 + (1.4 \times 10^2)^2}/(1.4 \times 10^2) \\ &\sim 2.6 \times 10^{-8} \times 10^3/(1.4 \times 10^2) \sim 1.9 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

となる。