第10回問題の解答

(平成 20 年 7 月 3 日版)

① 大きさ一定の磁気双極子 m が原点で、z 軸との角度 α を保ちながら角振動数 ω で才差運動している。このとき、十分に大きい半径 r の球面上での全放射エネルギーの時間平均を求めよ。

磁気双極子モーメントは $m(t)=(m\sin\alpha\cos\omega t,\ m\sin\alpha\sin\omega t,\ m\cos\alpha)$ と表せる。前問の結果からポインティングベクトルは

$$oldsymbol{S} = rac{1}{\mu_0} oldsymbol{E} imes oldsymbol{B} = rac{1}{\mu_0 c} rac{1}{r^2} \left(rac{\mu_0}{4\pi c}
ight)^2 \left| \ddot{oldsymbol{m}} \left(t - rac{r}{c}
ight) imes oldsymbol{n}
ight|^2 oldsymbol{n}$$

となる。ここで、 $n=x/|x|=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$ と置くと

$$\left| \ddot{\boldsymbol{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \boldsymbol{n} \right|^2 = (m\omega^2 \sin \alpha)^2 [\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \{ \sin \varphi \cos \omega (t - r/c) - \cos \varphi \sin \omega (t - r/c) \}^2]$$

である。この時間平均 $\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}dt$ をとると

$$\overline{\left|\ddot{\boldsymbol{m}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \boldsymbol{n}\right|^2} = (m\omega^2 \sin \alpha)^2 \left(\cos^2 \theta + \frac{1}{2}\sin^2 \theta\right) = (m\omega^2 \sin \alpha)^2 \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta)$$

となる。従って、

$$\overline{S} = \frac{1}{2\mu_0 c} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\mu_0}{4\pi c}\right)^2 (m\omega^2 \sin \alpha)^2 (1 + \cos^2 \theta) \, \boldsymbol{n}$$

である。半径rの球面上でこの面積分をおこなうと、

$$\int \overline{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n} \, r^2 d\Omega = \int d\Omega \frac{1}{2\mu_0 c} \left(\frac{\mu_0}{4\pi c}\right)^2 (m\omega^2 \sin \alpha)^2 (1 + \cos^2 \theta)
= \int \frac{1}{2\mu_0 c} \left(\frac{\mu_0}{4\pi c}\right)^2 (m\omega^2 \sin \alpha)^2 (1 + \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta d\varphi
= \frac{\mu_0}{6\pi c^3} (m\omega^2 \sin \alpha)^2$$

となる。回転する磁気双極子はパルサーのモデルになっている。

2 (ラザフォード模型の安定性)

ラザフォードの水素原子模型は電荷 e をもつ重い原子核のまわりを電子 (電荷を -e、質量を m とする) が等速円運動しているものであった。しかし、加速度運動をすることにより電子は電磁波を放射してエネルギーを失い、いずれは原子核におちこんでしまうことが予想される。その落ち込むまでの時間を求めよう。

- 1. 電子の回転半径を r, 速さを v, 回転の角速度を ω とするときの電子の加速度 $r\omega^2$ を求めよ。
- 2. 電子のもつエネルギー $W = \frac{1}{2}mv^2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$ を e, r で表せ。
- 3. 式 (1) から、単位時間あたりに電子が失うエネルギー dW/dt を e, m, r を用いてあらわせ。

$$\frac{dW}{dt'} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} |\ddot{\boldsymbol{X}}(t')|^2 \tag{1}$$

- 4. 以上の結果から dr/dt はどのように表されるか?
- $5. \ r(t=0) = r_0$ として、核に落ち込む時間を T として前問の結果 dr/dt = f(r) を変数分離せよ。

 $\int_{r_0}^0 dr/f(r) = \int_0^T dt$ としてTを求めよ。

- 6. T の値を求めよ。ここで初期の半径が $r_0=1\times 10^{-11}\mathrm{m}$ であるとする。 $(e=2\times 10^{-19}\mathrm{C},\ c=3\times 10^8\mathrm{m/s},\ m=9\times 10^{-31}\mathrm{kg},\ \epsilon_0=9\times 10^{-12}\mathrm{C}^2/\mathrm{Nm}^2$ を用いよ。)
- 1. 半径方向の運動方程式が

$$mr\omega^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

であるから、加速度は $r\omega^2=e^2/(4\pi\epsilon_0 mr^2)$

2. $v = r\omega$ より、

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

である。

3. Larmor の公式より、

$$\frac{dW}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} |\ddot{\boldsymbol{X}}(t)|^2 = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r^2}\right)^2$$

である。

4.~W の表式を dW/dt の式に代入すると以下の結果を得る。

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{4}{3} \frac{e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 c^3 m^2 r^2}$$

5.~dr/dt の表現を積分形になおして定積分すると

$$-\frac{3}{4}\frac{(4\pi\epsilon_0)^2c^3m^2}{e^4}\int_{r_0}^0 r^2dr = \int_0^T dt$$

となる。従って、

$$T = \frac{1}{4} \frac{m^2 c^3 r_0^3}{\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2}$$

である。

6. 前問の結果に数値を代入する。

$$T \simeq 4 \times 10^{-14} (s)$$

である。

③ 楕円偏光した電磁波 (電場は $E=E_0\cos\omega t+E_1\sin\omega t$ と表され $E_0,\,E_1$ は直交する定ベクトル) の自由電子による散乱微分断面積が

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)^2 \frac{|\boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{n}|^2 + |\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{n}|^2}{|\boldsymbol{E}_0|^2 + |\boldsymbol{E}_1|^2}$$
(2)

であることを示せ。n は散乱波進行方向の単位ベクトルである。

電子の運動方程式 (軌道を $m{X}(t)$ とする) で、電子の速度について $|\dot{m{X}}(t)|/c\ll 1$ として磁場の影響を無視すると、電子の加速度は

$$\ddot{\boldsymbol{X}}(t) = -\frac{e}{m}(\boldsymbol{E}_0 \cos \omega t + \boldsymbol{E}_1 \cos \omega t)$$

となる。さて、電荷の単位加速時間あたりの放射エネルギーは

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \int d\Omega \; \frac{|\boldsymbol{n}(t) \times [(\boldsymbol{n}(t) - \boldsymbol{\beta}(t)) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t)]|^2}{[1 - \boldsymbol{n}(t) \cdot \boldsymbol{\beta}(t)]^5}$$

であった。ここで、x が観測点であり、n(t)=(x-X(t))/|x-X(t)|、 $\beta(t)=\dot{X}(t)/c$ である。積分は半径 |x| 球面上の立体角全体である。特に $|\beta|\ll 1$ では放射エネルギー P が以下のように近似できる。

$$P \simeq rac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \int d\Omega \; |m{n} imes (m{n} imes \dot{m{eta}})|^2$$

ここに加速度の表式を代入し、微分型 $dP/d\Omega$ で書くと

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^4}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 m^2} |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0) \cos \omega t + \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1) \sin \omega t|^2$$

となる。これを電場の周期 $2\pi/\omega$ で時間平均したものが以下のようになる。

$$\frac{d\overline{P}}{d\Omega} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{dP}{d\Omega} dt = \frac{e^4}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 m^2} \frac{1}{2} \left(|\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_0)|^2 + |\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_1)|^2 \right)$$

$$= \frac{e^4}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 m^2} \frac{1}{2} \left(|\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_0|^2 + |\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_1|^2 \right)$$

ここで $|m{n} imes (m{n} imes m{E}_0)| = |m{n} imes m{E}_0|$ を使った。

一方で、単位時間あたりの入射波のエネルギー $S_{
m in}(t)$ は $S_{
m in}(t)=\epsilon_0 c |m E|^2$ である。時間平均をとると

$$\overline{S}_{\rm in} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} S_{\rm in}(t)dt = \frac{\epsilon_0 c}{2} (|\boldsymbol{E}_0|^2 + |\boldsymbol{E}_1|^2)$$

となる。

従って、求める散乱微分断面積 $d\sigma/d\Omega$ は以下のようになる。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\overline{P}}{d\Omega} \frac{1}{\overline{S}_{\rm in}} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)^2 \frac{|\boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{n}|^2 + |\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{n}|^2}{|\boldsymbol{E}_0|^2 + |\boldsymbol{E}_1|^2}$$