第 10 回問題

1 大きさ一定の磁気双極子 m が原点で、z 軸との角度 α を保ちながら角振動数 ω で才差運動している。このとき、十分に大きい半径 r の球面上での全放射エネルギーの時間平均を求めよ。

2 ラザフォードの水素原子模型は電荷 e をもつ重い原子核のまわりを電子 (電荷を $-e$、質量を m とする) が等速円運動しているものであった。しかし、加速度運動をすることにより電子は電磁波を放射してエネルギーを失い、いずれは原子核におちこんでしまうことが予想される。その落ち込むまでの時間を求めよう。

1. 電子の回転半径を r, 速さを v, 回転の角速度を ω とするときの電子の加速度 $r\omega^2$ を求めよ。
2. 電子のもつエネルギー $W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$ を e, r で表せ。
3. 式 (1) から、単位時間あたりに電子が失うエネルギー dW/dt を e, m, r を用いてあらわせ。
$$\frac{dW}{dt'} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}|\ddot{\boldsymbol{X}}(t')|^2 \tag{1}$$
4. 以上の結果から dr/dt はどのように表されるか？
5. $r(t=0) = r_0$ として、核に落ち込む時間を T として前問の結果 $dr/dt = f(r)$ を変数分離せよ。$\int_{r_0}^{0} dr/f(r) = \int_0^T dt$ として T を求めよ。
6. T の値を求めよ。ここで初期の半径が $r_0 = 1 \times 10^{-11}\mathrm{m}$ であるとする。($e = 2 \times 10^{-19}\mathrm{C},\ c = 3 \times 10^8\mathrm{m/s},\ m = 9 \times 10^{-31}\mathrm{kg},\ \epsilon_0 = 9 \times 10^{-12}\mathrm{C}^2/\mathrm{Nm}^2$ を用いよ。)

3 楕円偏光した電磁波 (電場は $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cos\omega t + \boldsymbol{E}_1 \sin\omega t$ と表され $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{E}_1$ は直交する定ベクトル) の自由電子による散乱微分断面積が

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)^2 \frac{|\boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{n}|^2 + |\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{n}|^2}{|\boldsymbol{E}_0|^2 + |\boldsymbol{E}_1|^2} \tag{2}$$

であることを示せ。$\boldsymbol{n}$ は散乱波進行方向の単位ベクトルである。