第 1 回問題

$\boxed{1}$ 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のベクトル積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は 3 階の擬テンソル ϵ_{ijk}

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad (ijk) \quad \text{is cyclic in} \quad (x, y, z) \\ -1 & \text{if} \quad (ijk) \quad \text{is anti-cyclic in} \quad (x, y, z) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

を用いて、その i 成分が

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k \tag{1}$$

と表される (二重の添字は和をとるものとする、上の例では j と k について和をとる)。

1. 次の等式を証明せよ。

$$\epsilon_{ikl}\epsilon_{lmn} = \delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km} \tag{2}$$

$$\epsilon_{ikl}\epsilon_{klm} = 2\delta_{im} \tag{3}$$

2. 上記の性質を用いて次の等式を証明せよ。

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) \tag{4}$$

$$\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} \tag{5}$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} \tag{6}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \tag{7}$$

3. 任意のスカラー場 $\varphi(\boldsymbol{x})$ およびベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ は各々$\nabla \times (\nabla\varphi) = 0,\ \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$ を満たすことを示せ。

$\boxed{2}$ 以下のベクトルの発散および回転を求めよ。但し、$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ は一定ベクトルとし、$|\boldsymbol{x}| = r$ とする。

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{b}, \quad (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}, \quad \psi(r)(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}).$$

$\boxed{3}$ ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ が与えられたとき、任意の 3 次元領域 V について

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) dV = \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) dV = \int_{\partial V} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS \tag{8}$$

がなりたつ (ガウスの発散定理)。ここで ∂V は V の境界面であり、$\boldsymbol{n}$ は境界面の面要素の法線ベクトルで V の外側に向かう。また、任意の曲面 S について

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int_{\partial S} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{9}$$

である (ストークスの定理)。ここで ∂S は曲面 S がつくる境界線であり、$d\boldsymbol{r}$ は曲線 ∂S にそった接線方向のベクトルである。
以上の 2 定理の少し異った形を証明しよう。

1. ガウスの発散定理に関連して次の式が成り立つことを示せ。(V は領域で、S は V がつくる境界面である。)

(a) $\displaystyle\int_V \nabla\varphi(\boldsymbol{x})\,dV = \int_S \varphi\,\boldsymbol{n}\,dS$

(b) $\displaystyle\int_V \nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\,dV = \int_S \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}\,dS$

(ヒント： (a) 定ベクトル $\boldsymbol{B}$ をはさんで $\int_V \nabla(\varphi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B})\,dV$ にガウスの発散定理を使う。(b) やはり定ベクトル $\boldsymbol{B}$ をはさんで、$\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})) = -\nabla\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})$ を使え。)

2. ストークスの定理に関連して次の式が成り立つことを示せ。(C は閉曲線で、S は C がつくる曲面である。)

(a) $\displaystyle\int_C \varphi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{r} = \int_S (\boldsymbol{n}\times\nabla)\,\varphi\,dS$

(b) $\displaystyle\int_C d\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \int_S (\boldsymbol{n}\times\nabla)\times\boldsymbol{A}\,dS$

$\boxed{4}$ 空間を 3 次元とするとき、$\nabla\cdot\boldsymbol{r},\ \nabla\times\boldsymbol{r},\ \nabla r,\ \nabla\left(\dfrac{1}{r}\right),\ \nabla^2\left(\dfrac{1}{r}\right)$ を求めよ。ただし、$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル、$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ である。また、$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)$ を半径 R の球で体積積分せよ。

$\boxed{5}$

1. 円柱座標 $(\rho,\,\varphi,\,z)$ で体積要素 $dV = dx\,dy\,dz$ を表し、その図形的意味をのべよ。(デカルト座標との関係は $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi, z = z$ である。)
2. 3 次元極座標 $(r,\,\theta,\,\varphi)$ で体積要素 dV を表し、その図形的意味をのべよ。(デカルト座標との関係は $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$ である。)